O. Jacek Dembek CSsR

RACJONALNOŚĆ BEZ GRANIC
DWIE PRÓBY ODPOWIEDZI

I. JAKIE GRANICE?

Tytuł niniejszego artykułu nawiązuje w sposób celowy do wydanego niedawno zbioru esejów J. Życińskiego zatytułowanego „Granice racjonalności".[1] Rozważania zamieszczone w tej pozycji wskazują na istnienie granic racjonalnego dyskursu. Granic nieprzekraczalnych, będących bowiem wynikiem zasad, na których ten dyskurs się opiera.

Gdy mowa jednak o granicach racjonalności, należy pamiętać, że nasze obecne poglądy na ten temat posiadają stosunkowo niedługą historię. Nie chodzi tu, oczywiście, o granice, na które wskazują takie czy inne religie, każąc uznać pokornie słabość rozumowania wobec Tajemnicy. Świadomość ograniczenia ludzkiego rozumu w tych wymiarach człowiek posiadł stosunkowo dawno. Są to ograniczenia, które pojawiają się tam wszędzie, gdzie stajemy wobec rzeczywistości przekraczającej nasze środki wyrazu czy możliwości wyobraźni.

Istnieją jednak ograniczenia zupełnie innej natury. W odróżnieniu od pierwszych nie wynikają one z zetknięcia się słabości ludzkiego rozumowania z Przekraczającym. One bowiem tkwią w samej naturze rozumowania, wynikają z przyjętej optyki, czy raczej należałoby powiedzieć: z najbardziej podstawowych zasad, które kierują ludzkim myśleniem.

Istnienie tych drugich ograniczeń stwarza sytuację - moim zdaniem - ciekawszą, ale zarazem bardziej otwartą na swoisty dramat, niż to miało miejsce w przypadku pierwszych. Jeśli bowiem każde nasze rozumowanie, niezależnie od tego, do jakiego przedmiotu je zastosujemy, opiera się na tych zasadach, to każdy racjonalny dyskurs, obojętnie jakiego przedmiotu dotyczący, będzie obciążony słabością i narażony na niebezpieczeństwa.

[1] J. Życiński, *Granice racjonalności*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN 1993.

Mówiąc o ograniczeniach drugiego typu, mam na myśli, oczywiście, te, które wynikają z tak zwanych twierdzeń limitacyjnych. Twierdzenia te, sformułowane i udowodnione w latach 1915-1935, ukazały, że tam wszędzie, gdzie podejmujemy próbę racjonalnego myślenia, stajemy wobec szeregu dylematów. Wspomnijmy jedynie dwa z nich: oto - zgodnie z twierdzeniami Gödla - posługiwanie się myśleniem typu dedukcyjnego każe nam wybierać pomiędzy bogactwem języka, który przyjmujemy na potrzeby rozważań, a pewnością gwarantującą nam, że w trakcie rozwoju badań nie natkniemy się w pewnym momencie na sprzeczność, która podważy sensowność całego dotychczasowego dorobku. Z drugiej strony, jak uczą tzw. twierdzenia Skolema-Löwenheima oraz twierdzenie Churcha, ponieważ w naszym mówieniu o rzeczywistości posługujemy się zwykle modelami, każdy zaś skończony zbiór faktów może mieć wiele modeli całkowicie niezgodnych ze sobą, nigdy nie mamy ostatecznej gwarancji, że w naszym opisie nie poszliśmy błędną drogą, wybierając taki a nie inny model.

Nie ma potrzeby szczegółowo omawiać w tym miejscu wspomniane twierdzenia (oraz inne, obejmowane wspólną nazwą twierdzeń limitacyjnych - właśnie ze względu na granice, które pokazują) oraz ich konsekwencje. Istnieje bowiem szereg opracowań poruszających te tematy. Celem niniejszego artykułu jest co innego. Chcę w nim ukazać sytuację, jaka zaistniała w filozofii matematyki tuż przed pojawieniem się twierdzeń limitacyjnych.[2] Rzecz bowiem w tym, że twierdzenia te - przynajmniej niektóre z nich stały się odpowiedzią na pragnienia pewnych matematyków uczynienia z ich dziedziny wzoru nauki do końca racjonalnej, opartej na niezachwianych podstawach, realizującej postulat doskonałej ścisłości. Myślenie matematyczne bowiem zawsze było i zapewne pozostanie - przynajmniej w opinii ludzi nie praktykujących go na co dzień - wzorem myślenia poprawnego, ścisłego, niepowątpiewalnego. Stąd też zburzenie snu o ostatecznej pewności w tej dziedzinie nie może pozostać bez znaczenia dla kogokolwiek, kto chce mieć z racjonalnością coś wspólnego.

Pojawienie się twierdzeń limitacyjnych zostało poprzedzone przez sformułowanie kilku programów, które miały na celu ukazanie drogi do ostatecznej pewności. W niniejszym artykule chcę omówić dwa z nich: logicyzm i formalizm. Były to programy mieszczące się w ramach filozofii matematyki, ale sądzę, że warto zapoznać się z ich elementami. Wydaje się bowiem, że sen o pewności, marzenie zdobycia i wyrażenia prawdy w sposób niepodważalny są ciągle żywe w umysłach wielu ludzi praktykujących nauki - od fizyków po teologów. Można by więc zapytać, czy marzenia te nie zawierają tych samych elementów, które doprowadziły do przebudzenia się z podobnego snu na terenie matematyki.

[2] Należałoby raczej powiedzieć: równocześnie z ich pojawianiem się, bowiem myśl nasza skupi się na pierwszym trzydziestoleciu XX wieku.

II. RZUT OKA NA SYTUACJĘ

Matematyka na przełomie wieków znalazła się w dziwnej nieco sytuacji. Morris Kline w swojej książce *Mathematics. The Loss of Certainty* omawia ją w rozdziale noszącym znamienny tytuł *U bram raju*.[3] Aksjomatyzacja podstawowych dziedzin matematyki stworzyła podstawy pewności, że dotychczasowe ich osiągnięcia nie są oparte jedynie na niepewnych intuicjach. I chociaż wielu matematyków uważało logikę i postulat absolutnej ścisłości za pewien dodatek, „higienę" pracy, to przecież, jak mówi Kline:

> Ścisłość odzyskała swoją rolę w matematyce i uczyniła pewniejszymi odkrycia wielu wieków. Matematycy mogli stwierdzić, że wypełnili wymogi standardu ustalonego przez Greków i być spokojnymi, że, poza względnie drobnymi poprawkami, ogromny przedmiot zbudowany na bazie empirycznej i intuicyjnej został usankcjonowany przez logikę. I rzeczywiście, byli oni zadowoleni z siebie. Mogli spoglądać wstecz na dawne kryzysy, liczby niewymierne, rachunek różniczkowy i całkowy, geometrię nieeuklidesową i kwaterniony, i gratulować sobie pokonania trudności, które rodziło każde z tych pojęć.[4]

Bardzo charakterystyczny w tym względzie był II Międzynarodowy Kongres Matematyków. Dwóch „wielkich" D. Hilbert i H. Poincaré, którzy rywalizowali pomiędzy sobą o pozycję przywódcy w matematycznym świecie, wygłosiło wówczas swoje przemówienia. Hilbert przedstawił listę 23 problemów, które miały - jego zdaniem - odegrać kluczową rolę w dalszym rozwoju matematyki. Poincaré natomiast w swoim przemówieniu zawarł słynną i często później cytowaną wypowiedź, w której - powołując się na doświadczenia przeszłości, gdy często twierdzono, iż absolutna ścisłość została osiągnięta, co później okazywało się jedynie życzeniem - pytał, czy to marzenie jest obecnie (w roku 1900) bliższe realizacji, niż było dotychczas. Jego odpowiedź brzmiała: tak. Sen o ścisłości i pewności, jeśli nawet nie został jeszcze do końca zrealizowany, to na pewno niedługo się spełni. Mówił:

> Dziś w analizie, jeśli chcemy zadbać o ścisłość, mamy do czynienia tylko z sylogizmem lub odwołaniem do intuicji czystej liczby, jedynej intuicji, która nie może nas zawieść. Można powiedzieć dziś, że absolutna ścisłość została osiągnięta.[5]

Kline twierdzi, że właśnie Hilbert był jedynym człowiekiem obecnym na wspomnianym Kongresie, przeczuwającym nadchodzącą burzę kryzysu, którą „matematycy obecni tam mogliby dostrzec, gdyby wyjrzeli przez okno; ale byli oni zbyt zajęci wznoszeniem wzajemnych toastów na swoją cześć".[6] Skąd wzięło się to przekonanie Kline'a? W XIX wieku wykazano, że niesprzeczność geometrii nieeuklidesowej opiera się na niesprzeczności geometrii euklidesowej. Pośrednictwo geometrii analitycznej

[3] M. K l i n e, *Mathematics. The Loss of Certainty*, Oxford, New York: Oxford University Press 1980, s. 172 n.

[4] Tamże s. 195.

[5] Cytat za M. K l i n e, jw. s. 195.

[6] M. K l i n e, jw. s. 195.

zaś, jak wykazał Hilbert, sprawia, że niesprzeczność geometrii euklidesowej sprowadza się do niesprzeczności arytmetyki liczb rzeczywistych. Stąd drugi problem z jego listy dotyczył właśnie wykazania niesprzeczności tej ostatniej. Być może, w trakcie trwania Kongresu mało kto zauważył doniosłość tego zagadnienia - w końcu liczbami operowano od tysięcy lat i dowiedziono wielu twierdzeń na ich temat. Czy zatem problem postawiony przez Hilberta nie był problemem sztucznym? Bardzo bliska przyszłość miała wykazać, że tak nie było. Właśnie ten problem znalazł się wśród centralnych pytań, na których rozbiła się pewność siebie matematyków z przełomu stuleci.

Pozostaje, oczywiście, pytaniem otwartym, na ile Hilbert przeczuwał nadchodzący kryzys. Nie mamy tu miejsca na szczegółowe badanie tej historycznej kwestii. Sądzę jednak, że nie należy przeceniać faktu umieszczenia na liście problemów zagadnienia spójności arytmetyki. Owszem, w roku 1900 Hilbert wiedział już o pierwszej antynomii teorii mnogości - Cantor zawiadomił go o niej w liście z roku 1896, zaś następny rok przyniósł jej publikację przez Burali-Fortiego. Z drugiej jednak strony, jak wiemy, Hilbert pozostał entuzjastą teorii mnogości oraz należał do tych matematyków, którzy piękno i rozwój swej dziedziny widzieli w ścisłym jej powiązaniu z ruchem aksjomatycznym. Sądzę, że sformułowanie przez Hilberta problemu niesprzeczności arytmetyki wiązało się raczej z jego zafascynowaniem aksjomatyką. Ponieważ zaś, z punktu widzenia aksjomatyki, wykazanie spójności jest czymś podstawowym, sądzę, że motywacji Hilberta należy szukać raczej we względach natury metodologicznej.

Cokolwiek powiedzielibyśmy na temat stanowiska Hilberta, nie ulega wątpliwości, że ogół matematyków nie przeczuwał nadciągającego kryzysu. Dopiero pojawienie się paradoksów teorii mnogości sprawiło, że wśród ogólnego zaskoczenia uświadomiono sobie, iż podobne paradoksy mogą wystąpić również w innych obszarach klasycznej matematyki. Fascynacja ruchem aksjomatycznym musiała doprowadzić do wyraźnego postawienia pytania o niesprzeczność. Coraz szersze posługiwanie się zbiorami nieskończonymi przy konstrukcji pojęć matematycznych sprowokowało postawienie na nowo dawno znanego problemu, który niepokoił już filozofów greckich, a mianowicie pytania o dopuszczalność pojęcia nieskończoności aktualnej. Podana przez Zermelo aksjomatyka mająca uratować teorię mnogości, w jednym z aksjomatów stwierdzała *explicite* istnienie zbioru nieskończonego. Ta sama aksjomatyka przyniosła kolejny aksjomat - pewnik wyboru - który z kolei wywołał serię pytań o sposób istnienia obiektów matematycznych.

Dwa ostatnie z wymienionych problemów posiadały swoją bogatą historię filozoficzną na długo przed tym, jak zostały przypomniane przez pierwsze dziesięciolecia naszego wieku. Co więcej, historia ta nie przyniosła żadnych definitywnych rozwiązań, a wręcz przeciwnie, zrodziły się w niej różne szkoły, w różny sposób udzielające odpowiedzi na przedstawione problemy. Nic przeto dziwnego, że postawienie na nowo tych pytań doprowadziło do powstania różnych szkół w filozofii matematyki. Oczywiście, jak to zwykle bywa w takich wypadkach, ponieważ nic nowego w nauce nie powstaje w próżni - okazało się, że pewne myśli podjęte przez te szkoły były obecne w sposób bardziej lub mniej wyraźny w poglądach matematyków poprzednich stuleci.

Oprócz wymienionych powyżej trzech problemów filozofowie-matematycy podjęli cały szereg innych z nimi związanych, od zagadnień metodologicznych poprzez epistemologiczne do ontologicznych. W obecnym artykule zajmiemy się jednym tylko problemem, mianowicie pytaniem o samą naturę matematyki i sposób jej tworzenia. Pozostawiamy problem istnienia obiektów matematycznych - zagadnienie niezmiernie ciekawe, ale przekraczające ramy niniejszej pracy.[7] Jeśli chodzi o zagadnienie nieskończoności, przedstawimy je tu w takim wymiarze, w jakim zajmowały się nim kierunki, które będziemy omawiać.

W niniejszym artykule zamieścimy zatem krótkie charakterystyki dwóch zasadniczych kierunków filozoficznych, które ukształtowały się na początku naszego stulecia (z uwzględnieniem matematyków z niezbyt daleko sięgającej przeszłości, którzy wywarli swój wpływ na powstanie tych kierunków), a mianowicie: logicyzmu i formalizmu.

Z racji historycznego pierwszeństwa zajmijmy się najpierw omówieniem logicyzmu.

III. LOGICYZM

Główną ideę kierunku nazwanego logicyzmem oddaje pierwsze zdanie *Principles of Mathematics* B. Russella:

> Czysta matematyka jest klasą wszystkich zdań postaci „p implikuje q", gdzie p i q są zdaniami zawierającymi jedną lub więcej zmiennych, tych samych w obu zdaniach i ani p, ani q nie zawierają żadnych stałych poza stałymi logicznymi.[8]

Innymi słowy: „Cała matematyka wynika z logiki symbolicznej".[9]

Logicyzm zatem twierdzi, że cała tak zwana czysta matematyka sprowadza się do logiki symbolicznej, nie operuje żadnymi pojęciami, których nie dałoby się zdefiniować w kategoriach pojęć logiki.

Powstanie omawianego kierunku w filozofii matematyki należy wiązać bezpośrednio z powstaniem i rozwojem logiki symbolicznej (w polskiej terminologii używa się częściej terminu „logika formalna"). Nie wdając się w omawianie bogatej historii tej dziedziny, powiedzmy tylko tyle, że jej początków dopatrywać się można w marzeniach Descartesa, który - zafascynowany metodami algebraicznymi - myślał o stwo-

[7] Dobrym opracowaniem na ten temat jest P. M a d d y, *Realism in Mathematics*, Oxford: Clarendon Press 1990.

[8] B. R u s s e l l, *Principles of Mathematics*, London: Norton & Company, 1903 s. 3.

[9] Tamże s. 9.

rzeniu ogólnej abstrakcyjnej nauki, która dawałaby język i możliwości rachunkowe dla pozostałych dziedzin matematyki. Zasadniczą rolę należy jednak przypisać G.W. Leibnizowi, który - inspirowany pewnymi ideami średniowiecznego teologa Rajmunda Lulla (1235-1315) - próbował stworzyć uniwersalną logikę symboliczną. Byłaby ona pewną „syntezą algebraiczno-logiczną".[10] „De Arte Combinatoria" (1666) było dziełem, które wyrażało te idee. Co więcej, Leibniz prowadził badania związane z tym, co później zostało nazwane „algebrą logiki" (stosuje się też nazwę „logika kombinatoryczna"), wprowadzając w sposób bardziej lub mniej bezpośredni operacje dodawania i mnożenia klas, pojęcia identyczności i negacji. Niemniej, Leibniz nie osiągnął w swych badaniach pełnego sukcesu. Jego idee z dziedziny logiki nie wzbudziły większego zainteresowania u współczesnych.[11]

Za właściwych twórców logiki symbolicznej uważa się dziś A. de Morgana, G. Boole'a, C. Peirce'a i G. Fregego. Ich prace i znaczenie w dziedzinie logiki formalnej są ogólnie znane. Obok tych postaci wymienić należy matematyków takich, jak E. Schröder czy L. Löwenheim, którzy w sposób szczególny przyczynili się do powstania algebry relacji, co miało niezwykle istotne znaczenie dla kształtowania się systemów formalnych. Pierwszym jednak, który odegrał istotną rolę w powstaniu logicyzmu, był Gottlob Frege (1848-1925), profesor z Jeny. Wśród jego najważniejszych - z obecnego punktu widzenia - prac, wymienić należy *Begriffschrift* (1879), *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884) oraz *Grundgesetze der Arithmetik* (tom I 1893, tom II 1903). W pierwszym z wymienionych dzieł Frege wprowadził aksjomatyczne podstawy logiki, po czym, wierząc, że prawa matematyki mają charakter analityczny, w drugim z nich przystąpił do budowy matematyki jako rozszerzenia logiki, wyrażając pojęcia arytmetyki w terminach pojęć logicznych. Droga do sprowadzenia matematyki do logiki wydaje się oczywista: jeśli udałoby się zdefiniować liczby i rządzące nimi prawa w kategoriach pojęć logicznych, to stąd można by wyprowadzić algebrę, analizę a nawet geometrię za pośrednictwem geometrii analitycznej.[12] Należy jednak podkreślić, że ponieważ w zastosowanej przez siebie notacji Frege odszedł w sposób zdecydowany od tego, do czego przywykł świat matematyczny, wpływ jego idei był bardzo niewielki. Właściwie dopiero poprzez odtworzenie pewnych jego myśli w *Principia Mathematica* B. Russella i A. N. Whiteheada, poglądy te stały się bardziej znane (Russell podkreślał, że odtworzył większą część tych poglądów, zanim jeszcze poznał je w sposób bezpośredni). Omawiając osiągnięcia Fregego przypomina się przeważnie swoisty dramat, który przeżył ten matematyk. Otóż, gdy drugi tom jego fundamentalnego dzieła *Grundgesetze der Arithmetik* był w druku, otrzymał on list od Russella, który zawiadamiał go o odkrytej przez siebie antynomii i wskazywał

[10] M. K l i n e, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York: Oxford University Press 1972, s. 1187.

[11] Tamże s. 1188.

[12] Bardziej szczegółowe omówienie myśli Fregego można znaleźć w E. W. B e t h, *The Foundations of Mathematics*, Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1968, s. 353-362.

na fakt, że w pierwszym tomie znajduje się pojęcie zbioru zbiorów prowadzące do niej. Cóż miał zrobić Frege? Zamieścił w dodatku do świeżo wydanego drugiego tomu swojej pracy list Russella z dopiskiem, że w ten sposób fundamenty całej przedstawianej przez niego teorii zostały wstrząśnięte. Poruszony do głębi chciał nawet zrezygnować z uprawiania matematyki.

W ten sposób wspomniany wcześniej kryzys, ujawniony w paradoksach teorii mnogości, wkroczył na teren filozofii matematyki. Nie oznaczał on jednak klęski świeżo stworzonego kierunku, jakim był logicyzm. Wówczas też Russell spotkał na II Międzynarodowym Kongresie Matematyków Peano. Jak powiedział potem w swojej *Autobiografii* (1951), moment ten stał się punktem zwrotnym w jego życiu, ponieważ pozwolił mu poznać idee i techniki potrzebne do rozwoju tych idei. W roku 1903 pojawiły się jego *Principles of Mathematics*, zaś wkrótce myśli przedstawione w tej książce znalazły swój formalny kształt w tworzonych wspólnie z Alfredem N. Whiteheadem trzytomowych *Principia Mathematica* (1910-1913). Pierwsze z dzieł zapowiadało program: „matematyka jest logiką symboliczną", zaś w drugim znalazła się próba realizacji tego programu.

Russell znał, oczywiście, teorię liczb rzeczywistych, zarówno stworzoną przez Dedekinda, jak i aksjomatykę arytmetyki liczb rzeczywistych podaną przez Hilberta. Stwierdzał jednak, że postulowanie istnienia żądanych obiektów jest zabiegiem bardzo wygodnym, ale nie do końca uczciwym[13] - uwaga ta odnosiła się do Dedekinda. Z drugiej strony, przedstawienie kilku czy kilkunastu aksjomatów, na których można oprzeć daną teorię wcale nie zapewnia jej niesprzeczności. Stąd też należy teorię liczb rzeczywistych, w konsekwencji całą matematykę, oprzeć na pewniejszych podstawach. Takich podstaw dostarczała, zdaniem Russella, logika.

Powyższe stwierdzenie wynikało z innego przekonania Russella. Na początku swojej drogi matematycznej wierzył on, podobnie jak Frege, że logika jest zbiorem prawd, których nie można poddawać w wątpliwość, a zatem sprowadzenie matematyki do logiki zapewni niesprzeczność poszczególnych teorii składających się na pierwszą z nich. Wiara ta opierała się na jego długotrwałym przekonaniu, które znalazło swój jasny wyraz w książce *The Problems of Philosophy* (1912), że zasady logiki oraz obiekty, którymi zajmuje się matematyka, istnieją niezależnie od tego, czy są poznawane przez ludzki umysł, czy nie. Poznawanie ich przez człowieka ma zatem charakter postrzegania ich przez umysł i wiedza zdobyta w ten sposób ma z konieczności charakter obiektywny i niezmienny. Co więcej, we wczesnym okresie swojego rozwoju, Russell był głęboko przekonany, że matematyka opisuje wiernie świat fizyczny. Powstanie geometrii nieeuklidesowych zmusiło go do tego, że już w *Principles* wyraźnie rozgraniczył pomiędzy zdaniami czystej matematyki, a zdaniami empirycznymi, opartymi na eksperymencie. Podejście drugiego z autorów *Principia Mathematica* było nieco inne. Whitehead w roku 1907 zauważał, że nie może istnieć

[13] M. K l i n e, *Mathematics*, s. 218.

żaden formalny dowód spójności założeń logicznych samych w sobie, dystansując się niejako od logicznej wiary swojego ucznia i współpracownika.[14]

Streśćmy obecnie pokrótce zasadnicze idee Russella i Whiteheada, przedstawione w *Principia Mathematica*. W dziele tym logika jest rozwijana w sposób aksjomatyczny, po czym próbuje się z tak skonstruowanej teorii wyprowadzić matematykę, poprzez zdefiniowanie jej pojęć, nie dołączając żadnych aksjomatów matematycznych. Pojęciami pierwotnymi systemu są pojęcia takie, jak zdanie elementarne, funkcja zdaniowa, prawda zdania elementarnego, negacja i dysjunkcja zdań i inne. Na bazie tych pojęć można zdefiniować inne, na przykład bardzo ważne pojęcie implikacji dwóch zdań, określane w powszechnie znany sposób. Autorzy *Principia* dodają do listy wprowadzonych przez siebie pojęć pierwotnych komentarz na temat ich rozumienia, ale, oczywiście, nie ma to znaczenia ze względu na konstrukcję systemu, bowiem zgodnie z metodą aksjomatyczną, wszystkie własności pojęć pierwotnych, będące przedmiotem teorii, muszą wynikać z aksjomatów. Pierwszym etapem konstrukcji jest stworzenie aksjomatycznego rachunku zdań, drugim zaś - rachunku predykatów. Zasadniczym momentem, z punktu widzenia filozofii, stało się stowarzyszenie pojęcia funkcji zdaniowej z pojęciem własności oraz, dalej, z pojęciem zbioru elementów posiadających tę własność. Takie podejście umożliwiło dowolne operowanie klasami nieskończonymi, ponieważ będąc podejściem intensjonalnym, nie wymagało wyszczególniania elementów klasy, co ma miejsce w podejściu ekstensjonalnym i co nie jest możliwe do zrealizowania w przypadku klas nieskończonych. Nie było to podejście nowe, stosowano je od samego początku istnienia teorii mnogości i ono właśnie doprowadziło do powstania szeregu paradoksów, między innymi paradoksu sformułowanego przez Russella w 1902 r. By tego uniknąć, należało dokonać rozróżnienia pomiędzy poziomami obiektów - każdy zbiór zdefiniowany poprzez własność obiektów, należących do danego poziomu, powinien sam znaleźć się na wyższym poziomie, by w ten sposób uniknąć prowadzącego do paradoksu pytania, czy zbiorowi temu przysługuje definiująca go własność czy nie. W ten sposób powstała teoria typów, właściwa systemowi Russella i Whiteheada.

Kolejnym krokiem stało się zdefiniowanie pojęcia liczby - poprzez określenie relacji równoliczności zbiorów (przy czym liczby całkowite były rozumiane w związku z tym jako klasy klas obiektów). Uzyskanie zaś pojęcia liczby naturalnej otwierało drogę do odtworzenia arytmetyki liczb rzeczywistych, w konsekwencji również geometrii, drogę, którą przebyło już poprzednie pokolenie matematyków.

Wiadomo, jakie trudności napotkało podejście Russella i Whiteheada. Pierwszą z nich stało się wprowadzenie aksjomatu redukowalności.[15] Był on potrzebny po to, by uprościć rozważania dotyczące identyczności elementów, by uniknąć dziwnych

[14] Tamże.

[15] A. N. Whitehead, B. Russell, *Principia Mathematica*, Cambridge: Cambridge University Press 1910-1913, t. 1 s. 55-60, 160-167.

wniosków w postaci „kres górny zbioru liczb rzeczywistych nie jest liczbą rzeczywistą" - ogólnie mówiąc po to, by otworzyć drogę „w dół" hierarchii typów. Russell stwierdzał:

> Aksjomat redukowalności jest wprowadzony po to, by usprawiedliwić wielką liczbę rozumowań, w których mamy do czynienia z pojęciami takimi, jak „wszystkie własności a" lub „wszystkie a-funkcje", w których trudno dopatrywać się jakiegoś istotnego błędu.[16]

A zatem, obok racji wspomnianej powyżej, aksjomat ten miał usprawiedliwić posługiwanie się w bardzo szeroki sposób pojęciem „wszystkie".

Oczywiście, podejście aksjomatyczne polega na swobodzie wyboru przyjmowanych aksjomatów, swobodzie ograniczonej jedynie postulatem niesprzeczności, a zatem z tego punktu widzenia posunięcie autorów *Principia* było w pełni uzasadnione. Z drugiej jednak strony, posunięcie to wywołało gwałtowną opozycję, ponieważ wielu matematykom wydawało się ono zbyt arbitralne. Niektórzy nazywali go ofiarą złożoną z intelektu, inni jak Ramsey, zresztą sympatyk logicyzmu - stwierdzali, że cokolwiek nie da się udowodnić bez użycia tego aksjomatu, nie powinno być w ogóle uważane za udowodnione.[17]

Krytyka aksjomatu redukowalności jest poniekąd zrozumiała. Nie chcę tu powoływać się na „samooczywistość" pozostałych aksjomatów, ponieważ, jak wiadomo, „samooczywistość" jest pojęciem wysoce nieoczywistym. Niemniej, przypomina się tu sytuacja z historii geometrii euklidesowej, gdy to odróżniająca się wyraźnie od innych postać piątego postulatu budziła podejrzenia, że i jego status jest inny, mianowicie, że może on zostać udowodniony na podstawie pozostałych. Sądzę, że podobnie było w przypadku aksjomatu redukowalności. Owszem, mamy tu do czynienia z czymś więcej, niż tylko z różnicą kształtu w zapisie. Oto, podczas gdy pozostałe aksjomaty w zasadzie wyrażają jedynie własności stałych logicznych oraz opisują relację wynikania, aksjomat redukowalności stwierdza istnienie własności obiektów pierwszego poziomu, odpowiadającej danej własności obiektów z innego poziomu. Można zatem powiedzieć, że na tle pozostałych, aksjomat redukowalności przedstawia się jako swego rodzaju stwierdzenie natury ontologicznej, bądź przynajmniej stwierdzenie na temat języka używanego w systemie.[18]

Autorzy *Principia* bronili wprowadzenia aksjomatu redukowalności w sposób opisany powyżej. Można jednak przypuszczać, że od samego początku nie byli zbyt zadowoleni z tego faktu; jawił im się on jako pewne ustępstwo wobec pragmatyzmu. Można przytoczyć tu pewien fragment ich wypowiedzi:

[16] Tamże s. 56.

[17] M. K l i n e, *Mathematics*, s. 223-224.

[18] Szczegółowe omówienie aksjomatu redukowalności z punktu widzenia logiki znaleźć można w M. B l a c k, *A History of Mathematics*, New York-London-Sydney: John Wiley & Sons, Inc. 1968, s. 112-118.

W przypadku aksjomatu redukowalności, intuicyjna oczywistość na jego korzyść jest bardzo mocna, ponieważ rozumowania, które on umożliwia oraz rezultaty, do których prowadzi, jawią się jako prawdziwe. Ale choć wydaje się bardzo nieprawdopodobnym, by ten aksjomat miał się okazać fałszywym, nie jest w żadnym wypadku nieprawdopodobnym, by nie miał on zostać oparty na bardziej oczywistych i podstawowych aksjomatach.[19]

W późniejszym czasie Russell sam stał się nieco ostrożniejszy w stosunku do tego aksjomatu, stwierdzając w *Introduction to Mathematical Philosophy* (1919), że z logicznego punktu widzenia nie dostrzega on żadnego przymusu wiary w logiczną konieczność tego aksjomatu i w związku z tym jego umieszczenie w ramach systemu stanowi wyraźny defekt, nawet jeśli ten aksjomat jest empirycznie prawdziwy.[20]

W drugim wydaniu *Principia Mathematica* z roku 1926 Russell próbował przeformułować ten aksjomat, ale ostatecznie i on, i Whitehead uznali, że wprowadzenie tego aksjomatu ma znaczenie czysto pragmatyczne, prowadzi on bowiem do pożądanych rezultatów. Pomimo to jednak nie jest on aksjomatem tego rodzaju, z którego byliby zadowoleni.

Następną serię problemów wywołały dwa inne aksjomaty wprowadzone przez Russella i Whiteheada do ich systemu: aksjomat nieskończoności oraz aksjomat wyboru. Jeśli chodzi o drugi z nich, to trudności związane z nim pojawiły się już przy pierwszym sformułowaniu tego aksjomatu przez Zermelo. Co do aksjomatu nieskończoności,[21] stwierdzającego istnienie nieskończenie wielu funkcji zdaniowych - był on konieczny dla zdefiniowania liczb naturalnych. Sami autorzy *Principia* wahali się co do tego, czy można ten aksjomat traktować jako aksjomat logiczny. W ostateczności bowiem można powiązać go z pytaniem o to, czy wszechświat składa się ze skończonej czy z nieskończonej liczby cząstek elementarnych, rozstrzygnięcie tego zaś pytania nie należy do logiki, ani nawet do matematyki, ale do nauk fizycznych.[22] Niemniej posługiwanie się zbiorami nieskończonymi wymaga wprowadzenia tego aksjomatu. Drugi typ obiekcji, jakie wywoływał aksjomat nieskończoności stanowiły wszystkie zarzuty przeciwników pojęcia nieskończoności aktualnej - i kilka lat później zdecydowany atak na pozycje logicyzmu w tym punkcie przypuścić mieli intuicjoniści.[23]

Tak więc próba oparcia matematyki na „pewnym fundamencie logiki" okazała się cokolwiek nieudana - fundament w postaci przedstawionej przez jego twórców sam potrzebował podparcia. Russell z czasem zmienił swój stosunek do idei przedstawionej w *Principia*. Nie rezygnując z programu logicyzmu stwierdził w drugim wydaniu

[19] Cytat za M. K l i n e, *Mathematics*, s. 224.
[20] M. K l i n e, *Mathematics*, s. 224.
[21] A.N. W h i t e h e a d, B. R u s s e l l, jw. t. 2 s. 183.
[22] M. K l i n e, *Mathematics*, s. 225.
[23] Program intuicjonizmu został przedstawiony w roku 1907 przez Brouwera, ale w latach 1910-1913 nie był on jeszcze bardzo popularny.

Principles z roku 1937, że rozstrzygnięcie problemu prawdziwości aksjomatu nieskończoności i wyboru może dokonać się jedynie na terenie nauk empirycznych. Jednak nawet to wyznanie nie uciszyło opozycji. Hermann Weyl w *Philosophy of Mathematics and Natural Science* (1949) stwierdził, że logicyzm potrzebuje oparcia się na wierze w pewien „logiczny raj", wszechświat wyposażony w pewną strukturę - innymi słowy, że jest to wizja typu platońskiego - co wymaga wiary nie mniejszej niż wiara Kościoła pierwszych wieków lub filozofów scholastycznych średniowiecza.

Krytyka innego nieco rodzaju rodziła się ze spostrzeżenia, że jeżeli logicyzm ma słuszność i całą matematykę uda się zredukować do logiki, to w ten sposób trzeba by było uznać, że matematyka jest nauką czysto formalną, której twierdzenia wynikają wyłącznie z praw myśli. Jak jednak na bazie takiego podejścia można wytłumaczyć fakt, że język matematyki nadaje się do opisu rzeczywistości fizycznej, przynosząc tak wspaniałe rezultaty na terenie nauk fizycznych i - w konsekwencji - w technice?

Kolejna trudność tkwi w statusie praw logiki. Jak zostało wspomniane powyżej, w punkcie wyjścia Russell był przekonany o prawdziwości tych praw. Jeśli jednak prawdziwość ta zostałaby podważona, cała procedura wykazania niesprzeczności matematyki sugerowana przez logicyzm okazałaby się bezowocna. Pierwszym aksjomatem budzącym wątpliwości tego typu był właśnie aksjomat redukowalności. Fakt, że wnioski wyprowadzone z niego przez autorów *Principia Mathematicae* nie wyglądały na nieprawdziwe, nie dawał pewności, że sam aksjomat jest prawdziwy - wystarczy tu powołać się na znane własności implikacji materialnej.

Powyżej wspomniane trudności nie oznaczają wcale, że program logicyzmu uległ załamaniu. W pewien sposób usiłowali go kontynuować matematycy tej miary, co A. Church czy W. v. O. Quine, choć krytykowali oni jego pierwotną postać. W tym miejscu pragnę zauważyć, że wymienieni matematycy są przedstawicielami realizmu matematycznego, jeśli wspomnieć jeden z kierunków zaangażowanych w problem istnienia obiektów matematycznych. Nie wydaje mi się to czymś przypadkowym. Jak zauważył Weyl w uwadze, którą wspomnieliśmy powyżej, logicyzm jest bliski pewnemu platonizmowi. Sądzę, że z dwóch kierunków, które omawiam w tym artykule, właśnie logicyzm jest najwdzięczniejszym polem dla poglądów realistycznych. Oczywiście, dotyczy to jedynie pewnej postaci realizmu - realizmu uznającego istnienie matematycznej struktury wszechświata oraz przyjmującego, że ta właśnie struktura jest najgłębszą warstwą ontologiczną uniwersum bytowego. Zauważmy dalej, że z tego punktu widzenia zarzut skierowany w stronę logicyzmu, zarzut oparty na pytaniu o „przystawalność" matematyki do świata fizycznego znajduje stosunkowo łatwą odpowiedź: rzeczywistość jest „modelowana" na tych samych relacjach, które stanowią podstawową warstwę logiki.

Niemniej, charakterystycznym wydaje się znane wyznanie Russella z jego *Portraits from Memory* (1958), w którym opisuje on swoje rozpaczliwe poszukiwanie fundamentów pewności oraz bolesne doświadczenie osuwania się kolejnych, położonych przezeń warstw tego fundamentu. Na tym zakończmy rozważanie podstawowych idei i osiągnięć logicyzmu.

IV. FORMALIZM

Program formalizmu zrodził się w łonie nurtu aksjomatycznego. Jak już niejednokrotnie stwierdzaliśmy, podstawowym problemem tego ruchu, po stworzeniu kolejnego systemu aksjomatycznego, było wykazanie jego niesprzeczności. Tradycyjna metoda realizacji tego zadania polegała na wskazaniu modelu rozpatrywanego systemu. Metoda ta nie budziła żadnych zastrzeżeń. Posługując się nią Beltrami w roku 1868 dowiódł spójności niektórych geometrii nieeuklidesowych, konstruując dla nich model euklidesowy. Tak więc dowód ten był zrelatywizowany do spójności geometrii euklidesowej. Spójność tej geometrii została wykazana w roku 1899 przez Hilberta, który skonstruował dla niej model w ramach teorii liczb rzeczywistych. Tak więc pytanie o spójność przesunęło się do tej teorii. Tu pojawiło się jednak istotne ograniczenie wspomnianej metody. Dla wykazania spójności teorii liczb rzeczywistych modele skończone były nieprzydatne, posługiwanie się zaś modelami nieskończonymi było niebezpieczne, ze względu na niedawno odkryte antynomie teorii mnogości. Potrzebna była inna metoda. Metoda ta została zaproponowana przez Dawida Hilberta, twórcę formalizmu, w roku 1904 podczas III Międzynarodowego Kongresu Matematyków. On sam jednak nie uczynił nic dla rozwinięcia tej metody przez następne kilkanaście lat i dopiero od roku 1917, pod wpływem narastającego ruchu intuicjonistycznego, poświęcił się całkowicie badaniom związanym z dowodem niesprzeczności teorii aksjomatycznych oraz rozwijaniu filozofii formalizmu.[24] Intuicjonizmu nie omawiam w niniejszym artykule. Tu należy powiedzieć tylko tyle, że wobec niepowodzeń programu logicyzmu, ten kierunek - będąc około roku 1915 jedynym proponującym jakiś sposób wyjścia z sytuacji kryzysowej, w jakiej znalazła się matematyka zdobywał coraz szersze uznanie. Jednak proponowane przezeń rozwiązanie można by nazwać pyrrusowym zwycięstwem ścisłości: uzyskanie pewności na terenie matematyki musiałoby być okupione odrzuceniem ogromnej części jej wyników. Nic dziwnego, że matematyk tej miary co Hilbert nie mógł zgodzić się na takie rozwiązanie. Mówił on, że intuicjonizm usiłuje załamać i zniekształcić matematykę, pozbawiając ją najbardziej podstawowych narzędzi pracy, jak na przykład zasady wyłączonego środka. Stwierdzał, że do stworzenia podstaw matematyki nie potrzebuje on ani Boga, jak Kronecker (jeden z prekursorów intuicjonizmu), ani pierwotnej intuicji Brouwera, ani aksjomatów redukowalności, nieskończoności czy wyboru, z których nie mogli zrezygnować Russell i Whitehead.[25] Hilbert

[24] A. F r a e n k e l, Y. B a r - H i l l e l, *Foundations of Set Theory*, Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1958, s. 266.

[25] M. K l i n e, *Mathematics*, s. 246.

postawił sobie cel: „ustanowić raz na zawsze pewność metod matematycznych"[26] i realizacji tego celu poświęcił się całkowicie.

Program Hilberta zakładał wykonanie dwóch kroków. Pierwszym miało być sformalizowanie całej matematyki. To znaczy, każda z jej dziedzin (faktycznie Hilbert myślał głównie o arytmetyce, analizie i teorii mnogości) powinna być przedstawiona w postaci systemu formalnego, posiadającego własne aksjomaty. Ten postulat w konsekwencji przynosił założenie, że w tak przedstawionych teoriach bierze się pod uwagę jedynie rodzaj i porządek symboli bez zwracania uwagi na ich znaczenie. Do operowania takim systemem wystarczałaby minimalna intuicja, pewna „intuicja globalna", pozwalająca jedynie na stwierdzenie tożsamości symboli, a mówiąc ściślej na stwierdzanie, czy dane symbole należą do tego samego rodzaju. W oparciu o tę intuicję, stwierdzenie, czy dwa ciągi symboli są identyczne czy nie, może dokonywać się w sposób niemal mechaniczny - może to być zrealizowane przez odpowiednią maszynę. Należy zauważyć, że ten postulat zakładał znacznie więcej, niż było realizowane przez metodę aksjomatyczną: o ile w tej metodzie można było spokojnie oprzeć się na logice, zakładając pewne znaczenie symboli logicznych - program formalizmu nawet te symbole pozbawiał wszelkiego znaczenia. W ten sposób, na przykład, wnioskowanie, że z koniunkcji zdań p i q wynika zdanie r, nie mogło opierać się na rozumieniu spójnika i, ale powinno być uzasadniane na bazie stosownych reguł i aksjomatów w sposób prawie mechaniczny, to znaczy przez porównywanie odpowiednich ciągów symboli.[27] Była to, zdaniem Hilberta, jedyna droga do uniknięcia niejednoznaczności języka oraz nieuświadomionego posługiwania się intuicjami wiązanymi z pewnymi pojęciami.

Z całą pewnością można stwierdzić, że program Hilberta w rozważanym dotychczas aspekcie wiązał się z nurtem, który akcentował ważność pojęcia struktury. Z punktu widzenia formalizmu bowiem, jedynie struktura zdania, a nie jego treść, miała decydujące znaczenie w procesie dedukcji.[28]

Hilbert nie eliminował z matematyki pojęcia nieskończoności; pewne symbole mogłyby reprezentować zbiory nieskończone, ale nadal żadne ich intuicyjne znaczenie nie było brane pod uwagę. Symbole te zostały wprowadzone do systemu jako tak zwane „symbole idealne", których rola zamykała się w tym, że potrzebne one były do budowania matematyki, i to usprawiedliwiało ich użycie. Z drugiej strony, Hilbert był przekonany, że w rzeczywistym świecie istnieje tylko skończona liczba obiektów, tak więc wprowadzenie elementów idealnych miało znaczenie czysto pomocnicze.[29] Pewna analogia może pomóc zrozumieć rolę tych elementów: trudno wiązać

[26] Cytat z *On the Infinite* D. Hilberta podaję za M. Kline, *Mathematics*, s. 246.

[27] A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, jw. s. 267.

[28] M. Black, jw. s. 147.

[29] M. Kline, *Mathematics*, s. 247. Przypomnijmy, że idealnym jest symbol I taki, że jego dodanie do systemu formuł S, z odpowiednią modyfikacją aksjomatów, rozszerza ten system do nowego systemu S', który jest zgodny z S we wszystkich formułach nie zawierających symbolu I.

jakiekolwiek znaczenie z jednostką urojoną *i*. Jednak operowanie nią jest konieczne, na przykład w twierdzeniu, że każdy wielomian n-tego stopnia ma dokładnie n pierwiastków zespolonych. Tak więc, brak intuicyjnego znaczenia nie jest równoznaczny z faktem, że danego symbolu nie można poprawnie i owocnie stosować w ramach teorii, posługując się nim w sposób zupełnie formalny.

Związkiem wynikania zachodzącym pomiędzy formułami systemu miały rządzić ściśle określone reguły, które zostały podane przez Hilberta. W oparciu o nie można powiedzieć, na czym polega dowód danej formuły. Otóż dowód jest skończonym ciągiem formuł, z których każda jest bądź aksjomatem, bądź też została otrzymana z wcześniej występujących w tym ciągu formuł poprzez zastosowanie którejś z reguł wynikania. Formuła jest prawdziwa, jeśli można podać jej dowód. Przy czym, każdy, kto potrafi rozróżniać symbole oraz stwierdzać, czy zastosowanie danej reguły zostało dokonane w sposób poprawny, jest w stanie orzec, czy dany ciąg formuł jest dowodem jakiejś formuły czy nie.

W ten sposób, w programie Hilberta, matematyka została sprowadzona do zbioru systemów formalnych, z których każdy posiada własny język, własną aksjomatykę, własne reguły wynikania. Zadaniem matematyki miało być rozwijanie tych systemów. Dodajmy: systemów złożonych z formuł pozbawionych jakiegokolwiek znaczenia, powiązanych ze sobą jedynie ze względu na swoją strukturę, strukturę, którą rządziły prawa systemu.

Godny podkreślenia jest pewien moment. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że tak ujęta matematyka nie może być nauką „o czymś".[30] Istotnie, trudno w grze symboli pozbawionych znaczenia dopatrzeć się jakiegokolwiek stwierdzenia o czymkolwiek. Stało się to przedmiotem jednego z zarzutów wysuniętych przez krytykę w kierunku programu Hilberta. Tak więc, jakkolwiek rozumielibyśmy realizm w matematyce, z tego punktu widzenia trudno jest łączyć formalizm z tym kierunkiem w filozofii matematyki. Z drugiej jednak strony wydaje mi się, że formalizm zawiera pewien element platoński. Mianowicie: prawdziwość danej formuły lub jej nieprawdziwość jest faktem, niezależnym od tego, czy jesteśmy obecnie w stanie podać jej dowód, czy nie. W programie Hilberta system zostaje definitywnie określony przez podanie języka, aksjomatów oraz reguł wynikania; każda formuła prawdziwa jest niejako potencjalnie zawarta w systemie od momentu podania tworzących go podstaw. Wydaje mi się, że jest to element o bardzo wyraźnym zabarwieniu platońskim. Oczywiście można to powiedzieć jedynie na bazie pewnej specyficznej ontologii, takiej mianowicie, która wyakcentowuje znaczenie struktury. Pozostawmy te stwierdzenia bez dalszego komentarza - wymagałoby to wejścia w inną dziedzinę filozofii. Zakończmy jedynie tę dygresję stwierdzeniem, że powyższa cecha, czy raczej należałoby powiedzieć „marzenie formalistów", zostało poddane w wątpliwość

[30] M. K l i n e, *Mathematical Thought*, s. 1205.

przez ten sam fakt, który stał się kamieniem, na którym potknął się cały kierunek formalizmu - twierdzenia limitacyjne.

Tyle odnośnie pierwszego kroku zaplanowanego przez Hilberta, kroku polegającego na sformułowaniu matematyki w postaci systemów formalnych. W tym momencie pojawia się konieczność wykonania drugiego kroku, bowiem podanie aksjomatów, sformalizowanie systemu nie zapewnia jeszcze jego niesprzeczności. Hilbert wraz ze swoimi uczniami, Wilhelmem Ackermanem, Paulem Bernaysem i Johnem von Neumannem, wypracował w latach dwudziestych naszego wieku to, co zostało nazwane jego teorią dowodu (*Beweistheorie*), która pokazywała, w jaki sposób można wykazać niesprzeczność danego systemu formalnego.

Istota idei Hilberta polegała na spostrzeżeniu: jeśli udałoby się wykazać, że zastosowanie do jakiejkolwiek formuły reguł wynikania przyjętych w systemie nie może prowadzić do sprzeczności, to automatycznie otrzymalibyśmy wniosek, że żaden ciąg będący dowodem nie może prowadzić do sprzeczności, a to właśnie oznacza spójność rozpatrywanej teorii. Rozumowania zmierzające do wykazania tego faktu miały opierać się na specjalnym systemie logicznym, który nie powinien budzić żadnych wątpliwości. W rzeczywistości owa metamatematyka była bardzo bliska ideom intuicjonizmu. A zatem nie było dopuszczone stosowanie zasady *tertium non datur* w dowodach orzekających istnienie (dozwolone były jedynie dowody konstruktywne); wykluczone zostało posługiwanie się indukcją pozaskończoną czy pewnikiem wyboru. Co więcej, stosowane argumenty powinny mieć charakter finitystyczny. Podobnie jednak, jak intuicjoniści, Hilbert nigdy nie określił dokładnie, czym mają być argumenty finitystyczne. W każdym razie, nigdy nie wygłosił jednoznacznego stwierdzenia na ten temat.

Jakie perspektywy otwierał program Hilberta? Z jednej strony program ten charakteryzował się bardzo optymistycznym spojrzeniem na matematykę. Można tu zacytować zdanie Hilberta, wygłoszone przez niego na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Bolonii w roku 1928:

> Nie istnieją żadne granice matematycznego rozumienia. W matematyce nie ma żadnego Ignorabimus - zawsze możemy odpowiadać na sensowne pytania. Nasz umysł nie posiada żadnej tajemniczej sztuki, lecz posługuje się określonymi i stałymi zasadami, które są gwarancją obiektywności jego rozstrzygnięć.[31]

Według Hilberta, wszyscy matematycy podzielają przekonanie, że każdy określony problem matematyczny może być rozwiązany. Było to jednak stwierdzenie nie do końca zgodne z rzeczywistością. Program Hilberta wywołał opozycję, zaś dokonane trzy lata po wygłoszeniu tego stwierdzenia odkrycia wykazały ostatecznie, że jest ono w pewnym sensie jedynie marzeniem, które nigdy nie może być zrealizowane. Zanim omówimy powyższe fakty, dodajmy, że - obok swojego optymizmu - program Hilberta

[31] Cytat za M. K l i n e, *Mathematical Thought*, s. 1208. Zob. też D. H i l b e r t, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig: B. G. Teubner 1930, s. 313-323.

niósł w sobie wizję nieciekawej przyszłości matematyki. Gdyby bowiem ten program udało się zrealizować, aktywność matematyczna mogłaby zostać całkowicie zautomatyzowana, poddana zasadom produkcji, co eliminowałoby skutecznie element twórczości i związany z nim posmak przygody nieodłączny od pracy matematyka. Nowe twierdzenia mogłyby być produkowane przez odpowiednio zaprogramowane maszyny, taka zaś wizja nie może się zgodzić z wielowiekowym widzeniem matematyki, jako najwyższego wysiłku ludzkiego umysłu, wzniosłością i pięknem uogólnień sięgającym niemal sfer mistyki. Doświadczenie „zrozumienia do końca" występujące w pracy matematyka, prowokujące przekonanie, że ma się do czynienia z czymś, co trudno zaliczyć do kategorii rzeczy uczynionych przez człowieka (język angielski operuje przyjętym szeroko terminem: *man-made*) jest zupełnie niespójne z taka wizją zautomatyzowanej matematyki. Tym bardziej może budzić zdziwienie fakt, że program formalizmu został stworzony przez matematyka tej miary, co Hilbert, któremu z całą pewnością nie było obce wspomniane doświadczenie. Wydaje się jednak, że należałoby rozróżnić w pracy Hilberta dwa aspekty: typową pracę matematyka oraz pracę w dziedzinie podstaw. Jak wspomniane zostało wyżej, oba te aspekty nie łączyły się w jego aktywności. Drugi z nich został podjęty nie po to, by zautomatyzować matematykę, ale właśnie jako zło konieczne, pewne zabezpieczenie przedpola, by prawdziwa aktywność matematyczna mogła być spokojnie prowadzona. We wspomnianym przemówieniu podczas Kongresu Matematyków w roku 1928 Hilbert dodał zdanie, które zdaje się potwierdzać powyższy wniosek: „Posiadając te nowe podstawy matematyki, które można poprawnie nazwać teorią dowodu, sądzę, że jestem w stanie skazać na wygnanie wszystkie problemy dotyczące podstaw".[32]

Program Hilberta wywołał opozycję. Twórca intuicjonizmu, Brouwer, stwierdzał, że owszem, formalizm pozwoli uniknąć sprzeczności, ale na jego drodze nie można otrzymać nic, co posiadałoby jakąkolwiek matematyczną wartość. Dodawał on: „na pytanie, gdzie można znaleźć matematyczną ścisłość, dwie partie dają dwie różne odpowiedzi. Intuicjonista mówi, że w intelekcie, formalista, że na papierze".[33] Również Weyl atakował program Hilberta, mówiąc: „Matematyka Hilberta może być przyjemną grą formuł, bardziej zdumiewającą nawet niż szachy, ale co daje ona poznaniu, skoro jej formuły nie mają żadnego materialnego znaczenia, przez co nie mogą wyrażać intuicyjnych prawd".[34] Z drugiej strony Russell, jakby zapominając o swoich wcześniejszych uwagach na temat matematyki, wysuwał pod adresem programu Hilberta różne obiekcje. Po pierwsze, stwierdzał on, wskutek pozbawienia formuł matematycznych jakiejkolwiek materialnej zawartości, można by było przyrównać pracę matematyka do pracy zegarmistrza, który tak bardzo oddał się

[32] Cytat za M. K l i n e, *Mathematics*, s. 251.
[33] Cytat za M. K l i n e, *Mathematical Thought*, s. 1208.
[34] Cytat za M. K l i n e, jw. s. 1208.

doskonaleniu zewnętrzego kształtu produkowanych przez siebie zegarków, że zapomniał umieszczać w nich mechanizmy.[35] Po drugie, zastrzeżenia Russella budziło Hilbertowskie pojęcie istnienia. Otóż, według Hilberta, nie można wysuwać obiekcji wobec stwierdzenia istnienia danego obiektu matematycznego, udowodnionego na bazie przyjętych aksjomatów i reguły wyłączonego środka. Russell uważał takie pojęcie istnienia za metafizyczne. Poza tym, jak zauważał angielski matematyk, nie ma żadnych ograniczeń w konstruowaniu wielu różnych, wzajemnie sprzecznych systemów aksjomatycznych. My tymczasem jesteśmy zainteresowani w tych systemach, które posiadają jakiś związek z danymi empirycznymi.

Przed powyższymi zastrzeżeniami można by jednak bronić program Hilberta, przywołując na pamięć stwierdzenie podane powyżej. Formalizacja miała stanowić, według niego, jedynie narzędzie do wykazania, że aktywność matematyków posiada sens, co nie byłoby prawdą, gdyby miała ona prowadzić w pewnym momencie do pojawienia się sprzeczności. Natomiast właściwa aktywność matematyczna powinna posługiwać się metodą stosowaną w tej nauce od początku: stawianiem i rozwiązywaniem problemów, nie zaś mechanicznym wypisywaniem formuł.

Dlatego też to nie wspomniana powyżej krytyka stanowiła powód załamania się programu formalizmu. Można by nawet powiedzieć, że wbrew powyższym krytykom program ten odnosił pewne sukcesy - udało się udowodnić niesprzeczność kilku teorii, między innymi pewnej ograniczonej wersji arytmetyki. Co więcej, w roku 1930 młody matematyk wiedeński, Kurt Gödel, dowiódł zupełności rachunku predykatów pierwszego rzędu, zawierającego zdania i funkcje zdaniowe.[36] I oto w roku 1931, gdy - jak się wydawało - program Hilberta był na najlepszej drodze do odniesienia pełnego sukcesu i jedynie czas był potrzebny do tego, by wypełnić pozostające luki, ten sam matematyk opublikował swoją słynną pracę *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, w której zawarł dwa twierdzenia uderzające w same podstawy tego programu: twierdzenie o niezupełności systemów dostatecznie bogatych, by zawierała się w nich arytmetyka liczb całkowitych oraz wynikające z niego jako wniosek twierdzenie o niemożności wykazania niesprzeczności takich systemów. Niemożność ta zrelatywizowana jest oczywiście do zastosowanych środków logicznych, ale - jak się okazało - odnosi się ona właśnie do logiki przyjętej zarówno przez intuicjonistów, logicystów, formalistów, jak i tej, która została zaakceptowana w teorii mnogości.

Twierdzenia Gödla uderzały bezpośrednio w program Hilberta, pokazując, że zamierzenie tego programu jest z samej swojej natury niemożliwe do zrealizowania. Jakby przez złośliwość losu, twierdzenia te zostały opublikowane pomiędzy pojawieniem się pierwszego i drugiego tomu fundamentalnej pracy Hilberta i Bernaysa

[35] Zob. M. K l i n e, *Mathematics*, s. 251.

[36] Obok niesprzeczności, zupełność systemu stanowiła drugi cel programu Hilberta - udowodnienie zupełności danego systemu zapewniało, że każda prawdziwa formuła może zostać udowodniona.

na temat podstaw matematyki. Dlatego w przedmowie do drugiego tomu jego autorzy przyznawali, że należy poszerzyć zakres metod rozumowania matematycznego. Istotnie, zostało to dokonane, między innymi, przez jednego z członków szkoły Hilberta, Gerharda Gentzena, który stosując obok metod dopuszczonych przez program mistrza metodę indukcji pozaskończonej - wykazał niesprzeczność teorii liczb i pewnej części analizy. Niemniej, choć niektórzy formaliści zgodzili się, że metoda indukcji pozaskończonej nie wykracza poza zakres dopuszczalnej logiki, jest oczywiste, że w ten sposób pojawiło się to samo niebezpieczeństwo, z którym spotkali się Russell i Whitehead konieczność poszerzania *ad hoc* zasobu dopuszczalnych środków (metod lub przyjętych aksjomatów) w momencie, gdy dotychczas przyjęte okazują się niewystarczające dla rozwiązania pojawiających się problemów.

ZAKOŃCZENIE

Zauważyć należy, że konsekwencje twierdzeń Gödla dla matematyki okazały się znacznie poważniejsze, niż tylko wykazanie nierealizowalności programu formalizmu. Pokazują one bowiem, że nie jesteśmy w stanie, na bazie przyjętej logiki, wykazać niesprzeczności rozwijanej przez nas matematyki. Oznacza to, że nie wiemy i zapewne nie będziemy wiedzieć (*ignorabimus?*), czy w pewnym momencie, owocnie dotychczas rozwijana teoria, nie doprowadzi do pojawienia się sprzeczności. Owszem, można szukać podstaw ufności w zastosowaniach teorii, ale, jak wiadomo, nie jest to pewna gwarancja niesprzeczności. Stąd, by spokojnie pracować na terenie matematyki, należy zdecydować się na pewnego rodzaju wiarę, podobną do wiary religijnej, zapewniającą, że uprawiana aktywność nie doprowadzi do pojawienia się sprzeczności i kontynuować pracę na wąskim poletku wyspecjalizowanej dziedziny, bez zwracania uwagi na podstawy. Czyż nie jest to zdumiewający zwrot historii, w której pragnienie ścisłości i ustalenia podstaw doprowadziło do głębokiej niepewności właśnie w tym zakresie?

Z drugiej strony, twierdzenie o niezupełności podważało podstawy panującego w praktyce matematycznej, a wyrażonego z głęboką pewnością przez Hilberta przekonania, że w zasadzie każdy postawiony problem da się rozwiązać. I tu wyniki Gödla pokazały, że poprawniejszą postawą jest ta, którą wyraża słowo *ignorabimus*. Wyniki te bowiem orzekają, że istnieją formuły, których prawdziwości ani nieprawdziwości nie da się udowodnić na bazie przyjętych środków logicznych. W związku z tym, nie ma żadnej gwarancji, że wysiłki zmierzające do rozwiązania jakiegokolwiek z postawionych w historii matematyki problemów, które z biegiem czasu zyskiwały na sławie, choćby nawet nie posiadały istotnego znaczenia z punktu widzenia rozwoju teorii, zostaną kiedykolwiek uwieńczone sukcesem.

Tak więc, wraz z pojawieniem się twierdzenia o niezupełności - a dotyczy to szerszej klasy twierdzeń obejmowanych wspólną nazwą twierdzeń limitacyjnych - nie tylko program Hilberta uległ załamaniu, lecz cała matematyka stanęła wobec kolejnego kryzysu. W odróżnieniu jednak od poprzednich kryzysów: kryzysu niewymierności, który doprowadził do ograniczenia greckiej matematyki do geometrii; dziewiętnastowiecznego kryzysu podstaw, który sprowokował pojawienie się wysiłków zmierzających do ustalenia kryteriów ścisłości na terenie matematyki; kryzysu podstaw z przełomu wieków XIX i XX, który doprowadził do wyodrębnienia się różnych kierunków w filozofii matematyki, ten kryzys charakteryzuje się tym, że z góry wiemy, iż drogi wyjścia z niego nie znajdziemy na terenie matematyki w oparciu o jej metody.

Sądzę, iż problematyka zarysowana w przedstawionych rozważaniach może mieć swoje znaczenie również poza terenem czystej matematyki, tam wszędzie, gdzie mamy do czynienia z jakąkolwiek formą racjonalnego dyskursu. Ponieważ dyskurs taki opiera się na jakiejś logice, musi w sobie ponieść niebezpieczeństwa tkwiące w logice samej. Stąd, można by powiedzieć (choć - oczywiście - należy tę uwagę rozumieć bardzo szeroko), że w naszych próbach racjonalizowania rzeczywistości stajemy wobec dylematu: bogactwo albo pewność. Im bogatszy jest język, który przyjmujemy dla opisu danej rzeczywistości, tym większa niepewność, czy rozwijając ten opis w jakimś momencie nie staniemy wobec sprzeczności. Zatem, im bogatsza jest rzeczywistość, którą zamierzamy opisywać, tym pokorniej powinniśmy zachowywać się wobec twierdzeń, które na jej temat wygłaszamy. Być może postawa wyrażana w słowie *ignorabimus* nie jest do końca słuszna, ale przedstawione doświadczenia, przez które przeszła ludzka myśl, wydają się uczyć, iż tam wszędzie, gdzie posługujemy się językiem i logiką, stwierdzenie „wiemy" powinno być wypowiadane bardzo ostrożnie. Tym ostrożniej, im szerszej (wyższej?) rzeczywistości dotyczy.

LIMITLESS RATIONALITY - TWO TENTATIVE ANSWERS

Summary

In the history of the human knowledge the question about the principles of rationality has always been very important. One of the main aspects of this question is the problem of the limits of rational thinking. The way of thinking typical for mathematics has always been taken as a model of rationality. In the present paper I try to describe two attempts in the philosophy of mathematics which tried to form this branch of science as a strict, consistent domain. These attempts were: logicism created by B. Russell and A. N. Whitehead and the program of formalism proposed by D. Hilbert.

Both logicism and formalism met many difficulties. In 1931 Kurt Gödel published his famous theorem that showed that the limits of rational thinking are based on the principles of this very thinking. This and others theorems, as for example theorems of Church or Skolem-Löwenheim, though they deal with meta-theoretical properties of formal systems, have their importance for every kind of rational thinking.