ARTYKUŁY

Ks. Adam Olszewski
Papieska Akademia Teologiczna, Kraków

ELEMENTY HISTORII POWSTANIA *TEZY CHURCHA*

Szczególnie w ostatnich czasach pojawiają się w literaturze filozoficznej sformułowania o dużej doniosłości, które zwane są „tezami". Jedną z nich jest tak zwana w literaturze przedmiotu *Teza Churcha* (w skrócie TC). Nazwa ta pochodzi od S.C. Kleenego.[1] Poniżej przedstawię kilka uwag o charakterze historycznym zawierających najważniejsze daty i sformułowania TC.

Wypada rozpocząć od powiedzenia paru słów o Alonzo Churchu, którego nazwisko występuje w nazwie TC. Church urodził się w 14 VI 1903 r. w Waszyngtonie, a zmarł 11 VIII 1995 r. w Hudson. Doktorat uzyskał w Princeton w 1924 r. Tam też spędził większość swego naukowego życia, aż do r. 1967, z dwuletnią przerwą (1927-1929) na naukowy pobyt w Harvardzie, Getyndze i Amsterdamie. Church znany jest głównie z następujących wyników logicznych: twierdzenia o nierozstrzygalności logiki pierwszego rzędu, rachunku lambda oraz owej *Tezy* swego imienia. Church był jednym z redaktorów czasopisma logicznego „The Journal of Symbolic Logic". Do obszaru jego zainteresowań należały również, związane z logiką, problemy filozofii, matematyki i tzw. computer science. Niemal do końca życia pracował nad zagadnieniem logiki intensjonalnej i teorii sensu.[2] Pośród wielu jego doktorantów znalazły się takie sławy w dziedzinie logiki, jak S. Kleene (1934), J. Rosser (1934), A. Turing (1938), L. Henkin (1947), M. Davis (1950), D. Scott (1958), R. Smullyan (1959), żeby wymienić najbardziej

---

[1] Por. S.C. Kleene, *Recursive Predicates and Quantifiers*, „Transactions of the American Mathematical Society" 53: 1943, s. 41-73; tegoż, *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam 1952 (rozdział XII); tegoż, *Origins of Recursive Function Theory*, „Annals of the History of Computing" 3: 1981, no. 1, s. 59.

[2] Por. C.A. Anderson, *Alonzo Church's Contributions to Philosophy and Intensional Logic*, „The Bulletin of Symbolic Logic" 4: 1998, no. 2, s. 129-171.

znanych.[3] Dodatkowo należy wspomnieć o niezwykłej atmosferze Princeton lat dwudziestych, a szczególnie lat trzydziestych XX w. Działali tam na niwie logiki matematycznej, w szczególności zagadnień związanych z rozstrzygalnością, E. Post, A. Church, K. Goedel, J. von Neumann, P. Bernays, S. Kleene, J. Rosser i inni.

Skąd w ogóle pojawił się problem rozstrzygalności? Pobieżny rzut oka na dzieje idei pozwala stwierdzić, że inspiracje dla Grupy z Princeton (jak pozwalamy sobie nazwać logików pracujących nad rozstrzygalnością i logików z nimi współpracujących) miały różny rodowód. Z jednej strony był to trend zapoczątkowany w starożytności przez Euklidesa polegający na skonstruowaniu pierwszego systemu aksjomatycznego. Euklides, jak wiadomo, skonstruował algorytm pozwalający obliczać największy wspólny podzielnik dwóch liczb. Ta linia myślenia zaowocowała pomysłami Leibniza skonstruowania rachunku pojęć, aż do Hilberta, który postawił zagadnienie zwane *Entscheidungsproblem*. Ten termin języka niemieckiego składa się z dwóch słów. Słowo *Problem* jest zrozumiałe, zaś *Entscheidung* znaczy w języku polskim „rozstrzygnięcie, postanowienie, decyzja".[4] Problem ten został tak nazwany i sformułowany całkowicie jasno przez Hilberta i Ackermana w stylizacji semantycznej. Stwierdzili oni, że jest to zagadnienie, które śmiało uchodzić może za „Hauptproblem der mathematischen Logik".[5] Chodziło o to, by za pomocą metod finitystycznych znaleźć procedurę rozstrzygania dla węższego rachunku predykatów, tzn. w skończonej liczbie efektywnych kroków rozstrzygnąć o dowolnej formule rachunku predykatów, czy jest czy też nie jest formułą spełnialną lub tautologią tego rachunku. Myślę, że to między innymi z powodu autorytetu, jakim się cieszył Hilbert w środowisku matematycznym, problem ten tak zaprzątał umysły współczesnych mu logików.

Jest jeszcze inne zagadnienie, które mogło tkwić, jak się wydaje, u podstaw zagadnień związanych z rozstrzygalnością. Był to problem „maszyny". Maszyną dla jednych był człowiek, dla innych Bóg, dla jeszcze innych maszyna to coś całkowicie odmiennego i sztucznego. Człowiek chciał obliczać, ale nie sam. Zorientował się, że pewne rzeczy (np. obliczanie) może za niego czynić urządzenie lub zwierzę. W kontekście podobnych rozważań pojawiają

---

[3] Por. H. Enderton, *In Memoriam: Alonzo Church 1903-1995*, „The Bulletin of Symbolic Logic" 1: 1995, no. 4, s. 486-488. Enderton przytacza trzydzieści jeden nazwisk doktorantów Churcha.

[4] Por. J. Piprek, J. Ippoldt, *Wielki słownik niemiecko-polski*, t. I, Warszawa 1982. Czasownik dla tego rzeczownika to *entscheiden*, co znaczy „rozstrzygnąć, postanowić, decydować".

[5] Zobacz np. D. Hilbert, W. Ackermann, *Grundzuege der theoretischen Logik*, 2. wyd. poprawione, New York 1946, s. 90-99; szczególnie s. 90.

się takie nazwiska, jak Rajmund Lull,[6] Kartezjusz, La Mettrie, Laplace, Hobbes,[7] Babbage,[8] Post, Turing. Chyba właśnie Princeton było tym miejscem na Ziemi, gdzie najwięcej uczyniono, by te zagadnienia dobrze sformułować i rozwiązać. Rozwiązano tam Entscheidungsproblem Hilberta, a na dodatek kilku ludzi w latach trzydziestych stworzyło matematyczne podstawy, na których bazie problem ten można było rozwiązać. Koncepcje Posta, Turinga, Churcha i Goedla były równoważne w sensie matematycznym. Dokładne ułożenie tych koncepcji w kolejności chronologicznej powstawania nie jest chyba możliwe, natomiast możliwe jest ułożenie tych koncepcji w kolejności publikacji. Oto ona: Goedel (1934), Church (1936), Kleene (1936), Post (1936), Turing (1936).[9] Dokładnie zagadnienie Hilberta rozwiązuje praca Churcha *A note on Entscheidungsproblem* (1936); dzisiaj jednak wiadomo, że na bazie każdej z wymienionych koncepcji problem Hilberta można rozwiązać.

O co dokładnie chodziło Hilbertowi? Jego sformułowanie zagadnienia miało charakter filozoficzny, a nie matematyczny. „Filozoficzny" znaczy w tym przypadku potoczny, intuicyjny. Czasem, gdy rozmawiamy o czymś z kimś innym i nie umiemy precyzyjnie wytłumaczyć, o co nam chodzi, pytamy rozmówcę, czy „chwyta intuicją", o co nam chodzi. Wydaje się, że może być tak, iż ktoś rozumie coś intuicyjnie, ale nie może tego precyzyjnie sformułować (natychmiast). Naturalnie, możliwa jest sytuacja, kiedy wydaje się nam, że rozumiemy coś intuicyjnie dobrze, jednak przy precyzyjnym określeniu okazuje się, iż problem jest pozorny, czyli problemu po prostu nie ma. Za czasów, kiedy Hilbert stawiał swój problem, słowo *entscheiden* nie miało precyzyjnego, matematycznego znaczenia, jedynie intuicyjne, potoczne. Matematycy chwytali jedynie intuicyjnie, o co w nim chodzi, a zatem, jak sądzę, problem Hilberta nie miał charakteru ściśle matematycznego. Pytanie: „Czy zbiór tautologii[10] logiki pierwszego rzędu jest rozstrzygalny?"

---

[6] Por. M. G a r d n e r, *Logic Machines and Diagrams*, New York 1958, s. 1-28.

[7] Por. w tej sprawie głębokie filozoficznie studium tych zagadnień w pracy J. W e b b, *Mechanism, Mentalism, and Metamathematics. An Essay on Finitism*, Dordrecht 1980, s. 1--32.

[8] Postać mało znana w szerszych kręgach filozofów. Por. np. R. G a n d y, *The Confluence of Ideas in 1936*, w: R. H e r k e n (ed.), *The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey*, Oxford 1988, s. 56-60.

[9] Jeśli chodzi o prace z r. 1936, to daty publikacji ich abstraktów układają się następująco: C h u r c h, *An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory*, maj 1935; K l e e n e, *General Recursive Functions of Natural Numbers*, lipiec 1935; P o s t, *Finite Combinatory Processes – Formulation I*, listopad 1936; T u r i n g, *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*, publikacja artykułu, grudzień 1936. Jeśli chodzi o prace Posta i Turinga, to praca Turinga zgłoszona została wcześniej niż Posta, jednak później opublikowana. Por. R. G a n d y, *The Confluence of Ideas in 1936*, s.102-103.

[10] Słowo „tautologia" w odniesieniu do rachunku predykatów może nie być całkowicie jasne. Przez analogię z rachunkiem zdań powiemy, że jest to zdanie zawsze prawdziwe.

nie stawiało problemu sformułowanego matematycznie. Ponieważ problem ten ma postać pytania o rozstrzygnięcie,[11] odpowiedzi poprawne na to pytanie są dwie: Tak lub Nie. Ażeby odpowiedź w ogóle była matematycznie możliwa, należało przeformułować samo pytanie. Każdy z wymienionych wyżej twórców przeformułował je na swój własny sposób (właściwie niezależnie od pozostałych).[12] Na przykład, według koncepcji Goedla można zrobić to tak: Czy zbiór tez logiki pierwszego rzędu jest rekurencyjny? To już jest dobrze określone pytanie matematyczne. Według koncepcji Turinga problem Hilberta można przetłumaczyć: Czy istnieje maszyna Turinga, która dla dowolnej formuły logiki pierwszego rzędu odpowie, czy jest ona czy też nie jest twierdzeniem tej logiki? Podobnie można uczynić dla innych znaczeń rozstrzygania. Zauważmy, że na gruncie koncepcji Goedla, na przykład, właściwie nie można odpowiedzieć na pytanie Hilberta. Goedlowska odpowiedź brzmiałaby: Zbiór tez logiki pierwszego rzędu nie jest rekurencyjny. Ale Hilbert nie pytał o to. Pytał, czy ten zbiór jest rozstrzygalny. Wagę tego spostrzeżenia docenił Church i wyraził w postaci swej tezy, którą sformułujemy tutaj nieco odmiennie: (TC) „Każdy zbiór, który nazwiemy rozstrzygalnym, jest zbiorem rekurencyjnym."

W standardowym sformułowaniu TC brzmi:[13] „(TC) Klasa funkcji efektywnie obliczalnych jest identyczna z klasą funkcji ogólnie rekurencyjnych".

Obecnie przejdę do podania chronologii wydarzeń, które doprowadziły Churcha do sformułowania TC. Church pracował pod koniec lat dwudziestych i na początku trzydziestych nad stworzenia systemu podstaw logiki. Opublikował wyniki swych badań w dwuczęściowym artykule *A Set of Postulates for the Foundation of Logic.*[14] System wtedy zbudowany okazał się być sprzecznym, co wykazali Kleene i Rosser.[15] Później Church wraz z Rosserem zbudowali podsystem, który dzisiaj zwiemy rachunkiem lambda Churcha.[16] Dla rachunku lambda stworzono pojęcie lambda-definiowalności – dowolna funkcja f jest lambda-definiowalna, gdy istnieje lambda-wyrażenie M, które tę funkcję lambda-definiuje, tzn. formuła lambda-rachunku $\{M\}(n)$ jest w tym rachunku sprowadzalna za pomocą odpowiednich reguł do wyra-

---

[11] Por. M. T o k a r z, *Wprowadzenie do logiki*, Katowice 1984 (rozdział: Pytania).

[12] Por. R. G a n d y, *The Confluence of Ideas in 1936*.

[13] To standardowe sformułowanie nie jest sformułowaniem samego Churcha.

[14] A. C h u r c h, *A Set of Postulates for the Foundation of Logic* (part I), „Annals of Mathematics" 33: 1932, no. 2, s. 346-366; part II, tamże, 34: 1933, no. 2, s. 839-864.

[15] S.C. K l e e n e, J.B. R o s s e r, *The inconsistency of certain formal logics*, „Bulletin of the American Mathematical Society" 41: 1935, s. 24; abstrakt zgłoszony Amerykańskiemu Towarzystwu Matematycznemu 16 XI 1934. M. D a v i s, *Why Goedel didn't have Church's Thesis*, „Information and Control" 54: 1982 – wymienia listę logików, którzy stworzyli systemy sprzeczne: Frege, Curry, Quine i Rosser (s. 4).

[16] A. C h u r c h, J.B. R o s s e r, *Some Properties of Conversion*, „Bulletin of the American Mathematical Society" 41: 1935, s. 332.

żenia $f(n)$, i tak musi być dla każdej liczby naturalnej n.[17] Dalszy rozwój poszedł w kierunku odtworzenia w lambda-rachunku najważniejszych funkcji arytmetycznych. Stało się to możliwe przy aktywnym współudziale Kleenego, który już na przełomie stycznia i lutego 1932 r., czekając w gabinecie dentysty, wpadł na pomysł zdefiniowania w rachunku lambda funkcji poprzednika, co zdecydowanie popchnęło budowę rachunku lambda do przodu.[18]

Rosser wspomina, iż Church w prywatnej rozmowie, na przełomie 1933/1934 r., zasugerował TC przez identyfikację klasy funkcji efektywnie obliczalnych z lambda-definiowalnymi. Jednak jeszcze z początkiem roku 1935 r. Church nie był pewien, jak twierdzi Davis, czy klasa funkcji lambda-definiowalnych i klasa funkcji ogólnie rekurencyjnych są identyczne.[19] W. Sieg sprzeciwia się temu twierdząc, że gdyby Church tego nie wiedział z początkiem roku 1935, to nie zaproponowałby oficjalnie swej tezy do American Mathematical Society w abstrakcie noszącym datę 22 III 1935.[20] Za datę publicznego ogłoszenia TC uchodzi dzień wystąpienia Churcha na posiedzeniu American Mathematical Society – 19 IV 1935. Publikacją, która zawiera sformułowanie TC, jest praca: A. Church, *An unsolvable problem of elementary number theory*.[21]

Oto co właściwie napisał Church:

> Celem niniejszej pracy jest zaproponowanie definicji[22] efektywnej obliczalności,[23] o której przyjmuje się, że w sposób satysfakcjonujący koresponduje z cokolwiek nieprecyzyjnym, intuicyjnym pojęciem, w którego terminach problemy tej[24] klasy są często stawiane, oraz pokazanie, na przykładach, że nie każdy problem tej klasy jest rozstrzygalny.[25]

A oto interesująca nas część zawartości wspomnianego przypisu trzeciego z pracy Churcha:

---

[17] Por. M. D a v i s, jw., s. 5.

[18] S.C. K l e e n e, *Origins of Recursive Function Theory*, „Annals of the History of Computing" 3: 1981, no. 1, s. 56. Tutaj też Kleene wspomina, iż już w 1932 r. byli przekonani wraz z Churchem, że każda funkcja lambda-definiowalna jest efektywnie obliczalna (s. 57).

[19] M. D a v i s, jw., s. 10.

[20] Por. w tej sprawie szczegółową argumentację w: W. S i e g, *Step by Step: Church's analysis of effective computability*, „The Bulletin of Symbolic Logic" 3: 1997, no. 2, s. 154-180, szczególnie s. 156-157.

[21] Opublikowane w „The American Journal of Mathematics" 58: 1936, s. 345-363. Przedruk w M. D a v i s, *The Undecidable*, New York 1965, s. 89-107. Strony tego artykułu Churcha będą podawane za przedrukiem w książce Davisa.

[22] Jak widać, Church nazwał swoja propozycję nie „tezą", lecz „definicją". Interesującym zagadnieniem jest to, jaki to ma być rodzaj definicji.

[23] W tym miejscu tekstu Churcha znajduje się przypis 3, który zacytujemy nieco dalej.

[24] Chodzi o klasę problemów arytmetyki elementarnej, których przykłady przytacza Church na samym początku swego artykułu.

[25] S. 90 w: D a v i s, *The Undecidable*.

Jak się okaże, ta definicja efektywnej obliczalności może być podana w dwóch równoważnych formach, (1) że funkcja określona w dziedzinie nieujemnych liczb całkowitych będzie nazwana efektywnie obliczalną, gdy jest lambda-definiowalną, w sensie z paragrafu drugiego poniżej, (2) że funkcja określona w dziedzinie nieujemnych liczb całkowitych, będzie nazwana efektywnie obliczalną, gdy jest rekurencyjna w sensie z paragrafu czwartego poniżej.[26] [...]
Propozycja identyfikacji tych pojęć z intuicyjnym pojęciem efektywnej obliczalności została po raz pierwszy uczyniona w niniejszym artykule (ale zobacz pierwszy przypis do paragrafu siódmego poniżej[27]). [...]
Jednakże fakt, iż tak bardzo różnorodne i (w opinii autora) równie naturalne definicje efektywnej obliczalności okazały się być równoważnymi, dodaje siły racjom podanym poniżej dla uznania (believing) tego, że konstytuują one tak ogólną charakterystykę tego pojęcia, która jest niesprzeczna ze zwykłym intuicyjnym jego rozumieniem.

SOME REMARKS ON THE ORIGIN OF *CHURCH'S THESIS*

S u m m a r y

The main purpose of the article is to give a short but exact and original Alonzo Church's formulation of his thesis. The most important dates and forms of its presentation and publication are reported and briefly discussed to avoid misunderstandings and false formulations which are likely to arose among some philosophers.

---

[26] O ile poprawnie zrozumiałem argumentację W. Siega z artykułu, który przytaczam w przypisie 20, twierdzi on, że Church sformułował swoja tezę w terminach funkcji rekurencyjnych (por. s. 163-164 artykułu Siega). Nie ma chyba jednak podstaw do takiego stwierdzenia, biorąc pod uwagę przytoczone cytaty z pracy Churcha.

[27] We wspomnianym miejscu pisze Church, że pytanie o relację pomiędzy efektywną obliczalnością a rekurencyjnością zostało po raz pierwszy postawione przez Goedla w rozmowie z nim. Zaś propozycja utożsamienia lamda-definiowalności z efektywną obliczalnością pochodzi niezależnie od Churcha.