Studia Paradyskie, t. 22, 2012, s. 69-95

ks. Krzysztof Jaworski
Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II

Rola aksjomatu komprehensji w rozwoju teorii mnogości

Wstęp

W roku 1874 na łamach czasopisma *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* ukazała się praca Georga Cantora *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*. Opublikowanie tego artykułu dało początek nowej dziedzinie naukowej – teorii mnogości. Jednym z filarów teorii mnogości Cantora stał się przyjmowany milcząco tzw. aksjomat komprehensji, który miał wyrażać jedną z najbardziej podstawowych ludzkich intuicji, że z różnych przedmiotów, charakteryzujących się określoną cechą, można utworzyć zbiór.

Teoria mnogości Cantora nie jest chronologicznie pierwszą dyscypliną naukową, w której pojawił się tytułowy aksjomat – jego początków można by się doszukać już w starożytności: w systemach Platona czy Arystotelesa, oraz wszędzie tam, gdzie ożywał spór o uniwersalia. W teorii mnogości przełomu XIX i XX w. aksjomat komprehensji spełnił jednak rolę szczególną: stał się *dywersantem*, który podkopując fundamenty ówczesnej matematyki dał impuls nowemu sposobowi jej uprawiania. Okazało się, że *oczywistość*, którą aksjomat komprehensji wyraża, rodzi bardzo nieoczywiste konsekwencje i prowadzi do antynomii. Celem niniejszego artykułu jest pokazanie, w jaki sposób niewinnie wyglądający schemat wstrząsnął światem podstaw matematyki w początkach XX w.

W pierwszej części pracy zostanie wyjaśniony sens omawianego aksjomatu oraz pokazana jego geneza. W części drugiej, po zaprezentowaniu najważniejszych antynomii, które można zbudować na gruncie Cantora naiwnej teorii mnogości, zostanie pokazany mechanizm, który do tych antynomii prowadzi, a który oparty jest właśnie na aksjomacie komprehensji. Trzecia część artykułu to próba usunięcia antynomii i wskazania dróg, na których można by zbudować niesprzeczny system, będący fundamentem całej matematyki.

Oczywiście, wybór zagadnień związanych z tematem niniejszej pracy ogranicza się tylko do spraw kluczowych. Byłoby dobrze, gdyby ta refleksja stała się inspiracją do dalszych badań. Podjęcie na nowo problematyki związanej z aksjomatem komprehensji, mimo że znana jest ona już od lat, wciąż może przynosić ciekawe rezultaty badawcze.

1. Geneza aksjomatu komprehensji

Aksjomat komprehensji głosi, że dla dowolnej formy zdaniowej *f(x)*, posiadającej jedną zmienną wolną *x*, istnieje zbiór *Z*, którego elementami są te i tylko te przedmioty, które spełniają ową formę zdaniową *f(x)*[1]. Schematycznie można to zapisać w następujący sposób:

$$\exists Z \forall x [x \in Z \equiv \varphi(x)]$$

Powyższy schemat pokazuje, że aksjomat komprehensji jest teoriomnogościowym narzędziem służącym do określania zbiorów. Pozwala on z uniwersum wybrać te i tylko te przedmioty, które posiadają jakąś cechę, i z tych wybranych przedmiotów utworzyć pewną całość.

1.1. Nazwy (etymologia)

W literaturze można spotkać kilka terminów używanych zamiennie z terminem „aksjomat komprehensji". Wszystkie one określone są mianem *aksjomatu* czy *pewnika*, tzn. zdania bazowego, przyjmowanego bez dowodu.

1.1.1 Aksjomat komprehensji (comprehension axiom)

Słowo *komprehensja* kojarzy się z łacińskim *comprehensio*, które znaczy tyle, co „zebranie razem, połączenie, pojęcie, zrozumienie"[2]. Angielskie *comprehension* tłumaczy się m.in. jako „zdolność pojmowania", z kolei pokrewne słowo *comprehensive* – jako „wyczerpujący, wszechstronny, obszerny, ogólny"[3].

Idąc śladem powyższych skojarzeń można by aksjomat komprehensji nazwać aksjomatem „rozumienia, pojmowania, czy uogólniania", czyli narzędziem pozwalającym „zbierać razem" pewne przedmioty, tworząc w ten sposób ich klasę, czy też narzędziem do tworzenia pojęć.

Słowo *comprehension* funkcjonuje również w kontekście sformułowanego przez Lewisa specyficznego rozumienia denotacji. Według niego denotacją

[1] Por. J. Dadaczyński, *Antynomie teoriomnogościowe a powstanie klasycznych kierunków badania podstaw matematyki*, „Zagadnienia filozoficzne w nauce" 26 (2000) s. 45.

[2] Zob. K. Kumaniecki, *Słownik łacińsko-polski*, Warszawa 2001, s. 90.

[3] Zob. J. Linde-Usiekniewicz [red.], *Wielki słownik angielsko-polski*, Warszawa 2008, s. 236.

nazywa się klasę wszystkich i tylko tych desygnatów danej nazwy, które istnieją aktualnie (takie rozumienie denotacji jest dość mało rozpowszechnione). Lewis wymienia jednak jeszcze inny rodzaj desygnatów, a mianowicie desygnaty możliwe, czyli te, które aktualnie nie istnieją, ale są niesprzeczne. Tenże właśnie zbiór desygnatów możliwych określił Lewis mianem *comprehension*. W ten sposób nazwy puste, lecz niesprzeczne, miałyby denotację zerową, ale nie zerową *comprehension*. Nazwy sprzeczne, natomiast, posiadają w tym sensie nie tylko zerową denotację, lecz również i zerową *comprehension*[4]. Taka koncepcja wpisuje się w rozumienie aksjomatu komprehensji jako instrumentu do określania zbiorów przedmiotów, które nie muszą istnieć aktualnie (np. zbiór wszystkich królów Polski).

1.1.2 Pewnik abstrakcji

Inną nazwą spotykaną w literaturze jest „pewnik abstrakcji". Abstrahowanie to wpisana w naturę człowieka zdolność intelektu (grec. *ἀφαίρεσις* – „odrywanie, oddzielenie, zatrzymywanie"). Jest to czynność specyficzna polegająca na „oddzielaniu i zatrzymywaniu jakiejś właściwości z rzeczy, na podstawie której intelekt formuje jej poznawczy obraz, czyli pojęcie (abstrakt)"[5]. Teoria abstrakcji została sformułowana już przez Arystotelesa, w kontekście jego dyskusji z Platonem na temat statusu ontycznego liczb. Dla Arystotelesa poznanie to proces, podczas którego „przy pomocy zreflektowanej metodycznie abstrakcji formułujemy poznawczy obraz rzeczy, który, choć oderwany od materii, ma jednak podstawę w jednostkowo i konkretnie bytującej rzeczy. Należy jednak zaznaczyć, że u Arystotelesa termin abstrakcja wiąże się bezpośrednio z formowaniem przedmiotów matematycznych, które – jego zdaniem – są wynikiem abstrakcji, i z tej racji nie bytują jako idealne przedmioty, jak utrzymywał Platon [...]. Sama abstrakcja została pojęta przez Arystotelesa jako czynność intelektu, dzięki której zatrzymuje on oddzielone i wyróżnione aspekty z jednostkowo i konkretnie bytujących rzeczy, a pomija inne"[6].

W takim kontekście pewnik abstrakcji znów jawi się jako narzędzie do określania zbiorów w procesie oddzielania czy wyróżniania pewnych przedmiotów na podstawie określonej wspólnej cechy. W podobny sposób tworzy się także pojęcia.

---

[4] Por. W. Marciszewski, *Denotacja*, [w:] Tenże [red.], *Mała Encyklopedia Logiki*, Wrocław-Warszawa-Kraków 1970, s. 47.

[5] A. Maryniarczyk, *Abstrakcja*, [w:] *Powszechna Encyklopedia Filozofii*, t. 1, Lublin 2000, s. 49.

[6] Tamże, s. 52.

1.1.3. Pewnik definicyjny

Kolejną nazwą stosowaną na określenie omawianego aksjomatu jest „pewnik definicyjny”. Definicja to krótkie i pełne określenie zmierzające do charakterystyki jakiegoś przedmiotu lub zakomunikowania o semiotycznych funkcjach wyrażenia (znaczeniu, denotacji lub konotacji) poprzez wskazanie sposobu jego przekładalności na inne wyrażenie[7].

Pewnik definicyjny można zatem uważać za narzędzie do formułowania definicji, co potwierdził m.in. Witold Marciszewski w swym odczycie podczas konferencji *Pamięci Profesora Leona Koja*, która odbyła się 30 czerwca 2007 r. w Lublinie (UMCS). Marciszewski postawił wtedy hipotezę, że specyfika natury ludzkiej polega na zdolności do kierowania się pewnikiem abstrakcji. Stwierdził on, że wiedza o tym pewniku jest cechą, która odróżnia gatunek ludzki od innych gatunków, a momentem przełomowym, który radykalnie oddzielił gatunek ludzki od innych gatunków, był moment powstania opartego na pojęciach języka. Aby dobrze zobrazować, na czym polega proces definiowania, Marciszewski przywołał znany obraz biblijny – człowieka w raju. Zaproponował wyobrażenie sobie sytuacji, w której Adam chce nauczyć Ewę nowo powstałego języka. Autor wychodzi z założenia, że u początków komunikacji językowej stoją definicje deiktyczne (ostensywne)[8]. Aby zatem nauczyć Ewę wszystkich nazw, Adam musi oprowadzić Ewę po raju i za każdym razem gdy zobaczą jakieś zwierzę, wypowiedzieć jego nazwę (np. *kangur*). Na początku Ewa mogłaby pomyśleć, że każde zwierzę nosi tę nazwę, ale „jeśli wejdzie na ten błędny trop, wyprowadzi ją z błędu pokazanie przez Adama innego kangurzego indywiduum z tym samym wyjaśnieniem. Ewa wnet pojmie, że w nabywanym przez nią języku «kangur» nie jest imieniem własnym, lecz nazwą ogólną”[9]. Autor uznaje, że w głowie Ewy (jak i zresztą wszystkich innych zdrowych ludzi) musi działać jakieś podstawienie pewnika definicyjnego. W omawianym przykładzie za wyrażenie f podstawia się xWy, gdzie y oznacza tego konkretnego kangura, który wyznacza zbiór kangurów na mocy relacji „W –...wygląda tak samo, jak..., natomiast x oznacza zwierzę *porównywane* z kangurem y[10]”. W ten sposób schemat pewnika definicyjnego można zapisać następująco:

$$\exists Z \forall x (x \in Z \equiv xWy)$$

---

[7] Por. S. Kamiński, *Definicja*, [w:] *Powszechna Encyklopedia Filozofii*, t. 2, Lublin 2001, s. 451.

[8] Definicja deiktyczna to taka definicja, która oprócz formuły głównej zawiera jakiś gest wskazujący na definiowany przedmiot. Zob. W. Marciszewski, *Definicja ostensywna*, [w:] Tenże [red.], *Mała Encyklopedia Logiki*, Wrocław-Warszawa-Kraków 1970, s. 40).

[9] W. Marciszewski, *Skąd Adam i Ewa wiedzieli o pewniku abstrakcji? Uwagi o podstawowym zagadnieniu pragmatyki*, http://www.calculemus.org/publ-WM/2007/pewnik-abstr.pdf (03.12.2010).

[10] Zakłada się, że relacja W jest równoważnościowa.

co należy czytać: „istnieje taki zbiór (kangurów), że należy do niego każdy i tylko taki element, który wygląda tak samo, jak ten pokazywany (kangur)".

Oczywiście w przypadku innego rodzaju definiowania, niż definiowanie ostensywne, za formułę *f(x)* można podstawić dowolną funkcję, za pomocą której da się wskazać określoną cechę wyznaczającą przynależność danego elementu do zbioru desygnatów definiowanej nazwy. W definicji klasycznej nazwa zbioru *Z* to definiendum, natomiast formuła *f* to definiens. Próbując w ten sposób scharakteryzować przy pomocy definicji klasycznej arystotelesowskie pojęcie *człowiek*[11], zbiór *Z* byłby zbiorem ludzi, wyrażenie *f(x)* byłoby podstawieniem definiensa „x jest zwierzęciem rozumnym". Tak sformułowany schemat pewnika definicyjnego czytałoby się następująco: „istnieje taki zbiór (ludzi), że należy do niego każdy i tylko taki element, który jest zwierzęciem rozumnym".

Po etymologicznej charakterystyce aksjomatu komprehensji zostanie teraz pokazana jego geneza oraz to, w jaki sposób w świecie nauki zaczęła kształtować się świadomość jego doniosłej roli u podstaw matematyki.

1. 2. Kontekst historyczny

Jak wyżej pokazano, pewnik definicyjny (czy zdolność do posługiwania się tym schematem) jest w pewien sposób wpisany w naturę człowieka. Człowiek może w codziennym życiu efektywnie się nim posługiwać, nie zdając sobie nawet z tego sprawy. Takie intuicyjne posługiwanie się pewnikiem abstrakcji w dziedzinach ścisłych może jednak prowadzić do nieoczekiwanych konsekwencji.

1.2.1 Ślady aksjomatu komprehensji przed powstaniem teorii mnogości

Aksjomatem komprehensji posługiwał się tak naprawdę już Platon, kiedy formułował swą teorię idei: „Już za młodu chodzi człowiek za ładnymi ciałami i jeśli go tylko dobrze przewodnik prowadzi, kocha jedno z tych ciał i tam płodzi myśli piękne; niedługo jednak spostrzega, że piękność jakiegokolwiek ciała i piękność innych ciał to niby siostry rodzone i że jeśli ma gonić za istotą piękna, to musi dobrze oczy otworzyć i widzieć, że we wszystkich ciałach jedna i ta sama piękność tkwi"[12]. Platon zauważa, że można w świecie patrzeć na różne przedmioty. Niektóre z tych przedmiotów można nazwać pięknymi. Mimo że owe przedmioty piękne są od siebie różne, łączy je wspólna cecha – bycie pięknym. Na podstawie tej wspólnej cechy Platon zatem jakby pokazuje, że istnieje taki zbiór, do którego należą wszystkie rzeczy piękne i tylko rzeczy piękne.

[11] Definicja ta brzmi następująco: *Człowiek jest to zwierzę rozumne*.
[12] Platon, *Uczta*, 210 a–b.

Członkowie Akademii Platońskiej posługiwali się także pewnikiem abstrakcji przy formułowaniu argumentu na istnienie idei: „Jeśli jest wielu ludzi, a każdy z nich jest właśnie człowiekiem, a więc jeżeli jest coś, co jest orzekane o każdym człowieku i o wszystkich ludziach, a nie jest tożsame z żadnym z nich, to jest konieczne, aby istniało coś poza każdym z nich, oddzielone od nich i wieczne, co właśnie dlatego można orzekać w identyczny sposób o wszystkich numerycznie różnych ludziach. I dokładnie to «coś jednego, co jest poza wieloma», co wykracza poza nie i jest wieczne, jest ideą”[13].

1.2.2 Aksjomat komprehensji jako część teorii mnogości Georga Cantora

Myśl platońska swą kontynuację znalazła w XIX-wiecznej teorii mnogości, dyscyplinie stworzonej przez Georga Cantora. W teorii mnogości do pojęcia zbioru dochodzi się abstrahując od konkretu, czyli od jednostkowego przedmiotu. „Stos kamieni jest przedmiotem konkretnym. Zbiór, którego wszystkimi i tylko elementami są kamienie z tego stosu jest obiektem abstrakcyjnym. Stos kamieni jako obiekt fizyczny ma własności fizyczne takie, jak np. masa. Zbiór, którego kamienie z tego stosu są elementami, nie jest przedmiotem fizycznym, a zatem nawet pytanie o jego własności fizyczne nie jest pytaniem poprawnie postawionym. Kamienie ze stosu kamieni nie są elementami stosu, tylko jego częściami”[14]. W tym miejscu należy wskazać fundamentalne dla teorii mnogości rozróżnienie: „zbiór w sensie dystrybutywnym oraz zbiór w sensie kolektywnym”.

Przez zbiór *A*-ków w sensie kolektywnym rozumie się pewną całość złożoną z poszczególnych części, przy czym każdym elementem zbioru *A*-ków jest *A*-k lub też fragment *A*-ka. Stosunek bycia elementem tak rozumianego zbioru jest przechodni[15]. Przez zbiór *A* w sensie dystrybutywnym, natomiast, rozumie się pewną całość złożoną z elementów, którymi są tylko *A*-ki. Stosunek bycia elementem nie jest w tym wypadku przechodni. Tak użyte słowo *zbiór* można by zastąpić słowem *rodzaj* lub *gatunek*. Zbiór w sensie dystrybutywnym nie jest przedmiotem fizycznym[16].

Teoria mnogości jest dyscypliną, która zajmuje się zbiorami w sensie dystrybutywnym.

[13] G. Reale, *Historia filozofii starożytnej,* t. 2, Lublin 2008, s. 103-104.

[14] K. Trzęsicki, *Logika i teoria mnogości. Ujęcie systematyczno-historyczne,* Warszawa 2003, s. 251.

[15] Przez zbiór w sensie kolektywnym można uznać np. las rozumiany jako zbiór poszczególnych drzew. Każdy element zbioru drzew jest drzewem. Co więcej, każda część drzewa (np. liść, gałąź) jest również elementem zbioru drzew.

[16] Elementami zbioru wszystkich ludzi, rozumianego dystrybutywnie, są wszyscy ludzie i tylko ludzie. Do tak rozumianego zbioru nie należą poszczególne elementy ludzkiego ciała (np. ręka, noga).

Cantor podał dwie definicje zbioru, jednak obydwie te definicje mają charakter intuicyjny, a nie aksjomatyczny. Konsekwencją tego stały się liczne sprzeczności – do tego stopnia, że teoria mnogości Cantora (nawet pomimo swej niezwykłej wartości naukowej) otrzymała miano *naiwnej*. Swoje podstawowe prace Cantor publikował w latach 1879-1893 w niemieckim czasopiśmie *Mathematische Annalen*.

Pierwsza definicja *zbioru*, sformułowana przez Cantora, brzmi następująco:

„Unter einer «Mannigfaltigkeit» oder «Menge» verstehe ich nämlich allgemein jedes Viele, welches sich als Eines denken läßt, d.h. jeden Inbegriff bestimmter Elemente, welcher durch ein Gesetz zu einem Ganzen verbunden werden kann, und ich glaube hiermit etwas zu definieren, was verwandt ist mit dem Platonischen *είδος* oder *είδέα*, wie auch mit dem, was Platon in seinem Dialoge «Philebos oder das höchste Gut» *μικτόν* nennt“[17].

„Pod pojęciem «rozmaitości» czy «zbioru» rozumiem mianowicie ogólnie każdą wielość, która może być pomyślana jako jedność, tj. każdy ogół określonych elementów, które na mocy pewnego prawa mogą być złączone w jedną całość. Mam nadzieję, że definiuję w ten sposób coś, co jest spokrewnione z platońskim *είδος* czy *ίδέα*, jak również z tym, co Platon w swym dialogu «Philebos albo najwyższe dobro» nazywa *μικτόν*[18].

Definicja druga:

„Unter einer «Menge» verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die «Elemente» von M genannt werden) zu einem Ganzen“[19].

„Pod pojęciem «zbioru» rozumiemy każde zebranie w jedną całość M określonych, dobrze odróżnionych przedmiotów m naszego oglądu czy naszych myśli (które nazywane są «elementami» M)”[20].

Jak dobrze widać, aby zdefiniować zbiór Cantor posłużył się pewnikiem abstrakcji. Obydwie definicje Cantora mówią bowiem o możliwości łączenia

---

[17] G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, [w:] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, E. Zermelo [red.], Verlag von Julius Springer, Berlin 1932 (reprint: Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1980), s. 204.

[18] Tłum. za R. Murawski, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Poznań 2003, s. 175.

[19] G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, [w:] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, s. 282.

[20] Tłum. za R. Murawski, *Filozofia matematyki*, s. 176.

w całość różnych (ale określonych) przedmiotów (*elementów*). Ponadto definicja pierwsza wskazuje, że musi istnieć *pewne prawo*, na mocy którego te elementy są *zbierane* (w schemacie pewnika definicyjnego odpowiednikiem tego prawa byłaby funkcja *f*, która *włącza* przedmioty do zbioru lub nie). Wszystkie te operacje, opisane przez Cantora jako prowadzące do określenia zbioru, odpowiadają dokładnie temu, co postuluje pewnik abstrakcji. Można by zaryzykować jeszcze mocniejsze stwierdzenie: Cantor definiując zbiór podał jednocześnie schemat pewnika abstrakcji (choć wprost nazwy *pewnik abstrakcji* Cantor nie użył). Ma to fundamentalne znaczenie dla dalszych rozważań, gdyż okaże się wkrótce, że taka definicja zbioru jest wadliwa.

1.2.3 Napięcie związane z ewolucją teorii mnogości

Georg Cantor żył i tworzył na przełomie XIX i XX w. Był to okres żywo rozwijających się badań nad podstawami matematyki. W ostatniej ćwierci XIX w. i pierwszych trzydziestu latach w. XX ukształtowały się trzy charakterystyczne nurty, w jakich uprawiano filozofię matematyki: logicyzm, intuicjonizm i formalizm. Dla tematyki poruszanej w niniejszej pracy kluczowe jest podejście logicyzmu, znamienne szczególnie dla G. Fregego (którego uważa się za twórcę tego nurtu), B. Russella oraz A.N. Whiteheada.

Koncepcja logicyzmu nawiązuje do myśli J. Locke'a i G.W. Leibniza, którzy twierdzili, że sądy matematyczne są zdaniami o charakterze tautologicznym. Według Leibniza każde zdanie matematyczne da się sprowadzić do niewielkiej ilości aksjomatów, które z kolei są zdaniami logiki. Skoro więc całą matematykę da się wyprowadzić z aksjomatów logicznych, to musi ona być częścią logiki. Niestety, stan logiki w czasach Leibniza nie pozwolił, by w sposób formalny przeprowadzić przedsięwzięcie wyprowadzenia całej matematyki z logiki. Głównym problemem było to, że ówczesne teorie matematyczne nie były zaksjomatyzowane i nie tworzyły jednego systemu. Ekspansję idei logicyzmu na przełomie XIX i XX w. umożliwiły dopiero takie wydarzenia w dziejach nauki, jak: po pierwsze – arytmetyzacja matematyki, po drugie – formalizacja logiki wyznaczająca stosowną operację wynikania logicznego, po trzecie – powstanie teorii mnogości G. Cantora, przy pewnym współudziale R. Dedekinda[21].

Naczelna teza logicyzmu głosiła, że cała matematyka jest sprowadzalna do logiki lub też (mówiąc inaczej) że matematyka jest tylko częścią logiki. Z drugiej strony pojawiały się próby unifikacji matematyki klasycznej przez sprowadzenie jej do arytmetyki. Chciano pojęcie liczby rzeczywistej (a także liczby całkowitej, wymiernej i niewymiernej) zdefiniować za pomocą pojęcia liczby naturalnej i elementarnych pojęć teorii mnogości. Ponadto próbowano pokazać, że wszystkie

[21] Por. J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym*, Tarnów 2000, s. 231.

własności liczb rzeczywistych mogą być wydedukowane z twierdzeń arytmetyki liczb naturalnych[22]. Trzeba zatem było zbudować rzetelną arytmetykę liczb naturalnych i tego zadania podjął się G. Frege w dziełach: *Grundlagen der Arithmetik* (1884) oraz *Grundgesetze der Arithmetik* (t. I – 1893, t. II – 1903)[23]. W pracach tych Frege korzystał z osiągnięć G. Cantora, szczególnie w zakresie wypracowanych przez niego pojęć równoliczności zbiorów.

Gdy Frege kończył pracę nad *Grundgesetze*, zdarzyło się jednak coś, co wstrząsnęło jego teorią. Wykryto, że niepostrzeżenie wpadł on w pułapkę intuicyjnego posługiwania się pojęciem zbioru, co w przypadku bardziej subtelnych rozważań okazało się zawodne (nie było na przykład jednoznacznej odpowiedzi na pytanie o istnienie zbioru wszystkich zbiorów). Sam Frege posłowie do drugiego tomu *Grundgesetze* rozpoczyna od słów: „Autorowi dzieła naukowego nie może zdarzyć się nic bardziej niepożądanego, jak to, gdy po ukończeniu jego pracy zdruzgotana zostanie jedna z podstaw, na których wspierał on swe konstrukcje. W to położenie postawił mnie list pana Bertranda Russella [...] Pan Russell znalazł sprzeczność, którą teraz wyłożę"[24]. Frege nigdy nie ukrywał, że wielkim weryfikatorem jego teorii był B. Russell. Powszechnie znana jest korespondencja, jaką uczeni prowadzili ze sobą w tej sprawie.

16 czerwca 1902 r. Russell, przestudiowawszy pierwszy tom *Grundgesetze*, napisał do Fregego:

„W odniesieniu do wielu konkretnych pytań znalazłem w Pańskim dziele dyskusje, rozróżnienia i definicje, których na próżno by szukać w pracach innych logików. W szczególności, jeśli chodzi o funkcje (§ 9 Pańskiego «Begriffsschrift»), to sam doszedłem do poglądów, które są identyczne z Pańskimi nawet w szczegółach. Jest jednak jedno miejsce, w którym natrafiłem na trudność. Stwierdza Pan (s. 17), że funkcja może zachowywać się jak element nieokreślony. Wcześniej wierzyłem w to, teraz jednak pogląd taki wydaje mi się wątpliwy z powodu następującej sprzeczności. Niech w będzie taką oto własnością: być własnością, która może być orzekana o sobie samej. Czy w można orzec o niej samej? Z każdej odpowiedzi [na to pytanie] wynika odpowiedź przeciwna. Musimy zatem wyciągnąć wniosek, że w nie jest własnością. Podobnie nie istnieje żadna klasa (jako całość) złożona z tych klas, które, każda wzięta jako całość, nie należą do samych siebie. Wnoszę stąd, że w pewnych warunkach definiowalne kolekcje nie tworzą gotowych całości"[25].

---

22 Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Poznań 2008, s. 70.

23 Teorię swoją Frege wyłożył najpierw w książce *Die Grundlagen der Arithmetik*, napisanej w 1884 r., uszła ona jednak uwagi ówczesnych matematyków wskutek jej filozoficznego nastawienia (zob. A. Mostowski, *Logika matematyczna: kurs uniwersytecki*, Warszawa-Wrocław 1948, s. 175).

24 A. Mostowski, *Logika matematyczna: kurs uniwersytecki*, s. 208.

25 R. Murawski, *Filozofia matematyki,* s. 246. Także [w:] J. van Heijenoort [red.], *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Massachusetts 1967, s. 124-125.

Frege na list swego dyskutanta odpisał 22 czerwca 1902 r. Można tam znaleźć następujące słowa:

„Odkrycie przez Pana sprzeczności było dla mnie wielką niespodzianką i, powiedziałbym nawet, konsternacją, ponieważ wstrząsnęło to podstawą, na której chciałem zbudować arytmetykę. Wydaje się, że przekształcenie zdania ogólnego o równości [funkcji] na zdanie ogólne o równości [ich] przebiegów (§ 9 moich «Grundgesetze») nie zawsze jest dozwolone i że moja reguła V (§ 20, s. 36) jest fałszywa oraz że moje wyjaśnienia w § 31 są niewystarczające, by zapewnić, że moje kombinacje znaków mają sens we wszystkich przypadkach. Muszę jednak pomyśleć jeszcze nad tym zagadnieniem. [...] Pańskie odkrycie jest godne uwagi i być może okaże się wielkim krokiem naprzód w logice, choć na pierwszy rzut oka wydawać się może niepożądane. Nawiasem mówiąc, wydaje mi się, że wyrażenie – «własność jest orzekana o sobie samej» jest niedokładne. Własność jest z reguły funkcją pierwszego rzędu i funkcja ta wymaga jako argumentu pewnego przedmiotu i nie może sama być argumentem. Dlatego też wolałbym mówić, że «pojęcie jest orzekane o swym własnym zakresie»”[26].

W obliczu zaistniałej sytuacji Russell postanowił od nowa podjąć dzieło Fregego, by zredukować matematykę do logiki, a zasady swojej filozofii przedstawił w książce *The Principles of Mathematics* z 1903 r. Tam też dokonał dokładnej analizy antynomii klas niezwrotnych, którą odkrył wcześniej w teorii Fregego. Owocem jego pracy stało się napisane wspólnie z Whiteheadem trzytomowe dzieło *Principia Mathematica* (1910-1913). Dzieło to zamknęło główny okres rozwoju logicyzmu[27].

Choć odkrycie antynomii Russella stało się przełomem w pracach nad stworzeniem solidnych podstaw matematyki, a od nazwiska tego filozofa wzięła nazwę najsłynniejsza teoriomnogościowa antynomia, to Russell nie był pierwszym, który zauważył słabe punkty ówczesnej teorii zbiorów. Okazuje się, że w roku 1899 znany był już Cantorowi paradoks zbioru wszystkich zbiorów. Dowiadujemy się tego z korespondencji Cantora z Dedekindem z 31 sierpnia tegoż właśnie roku[28]. Chronologicznie natomiast jako pierwszą odkryto antynomię największej liczby porządkowej. Sądzi się, że odkrył ją Cantor w 1885 r. i pisał o nim w liście do Hilberta w r. 1886. Pierwsza publikacja na ten temat pochodzi jednak od włoskiego matematyka Cesare Burali-Fortiego: *Una questione sui numeri transfiniti*, „Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo” 11 (1897) s. 154-164, stąd od jego właśnie nazwiska antynomia ta wzięła swą nazwę[29].

---

[26] R. Murawski, *Filozofia matematyki*, s. 226-227.

[27] Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Poznań 2008, s. 73.

[28] Zob. *List Cantora do Dedekinda*, [w:] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, s. 448. Także [w:] R. Murawski, *Filozofia matematyki. Antologia*, s. 194-195.

[29] Por. J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym*, Tarnów 2000, s. 272.

Oprócz tych trzech antynomii można na gruncie Cantora teorii mnogości wykazać jeszcze antynomię zbioru uniwersalnego oraz antynomię zbioru wszystkich liczb kardynalnych. Sposób formułowania wszystkich tych antynomii opiera się na tym samym schemacie rozumowania. Zostanie on zaprezentowany w kolejnej części tej pracy.

2. Aksjomat komprehensji jako źródło antynomii

Wiadomo już, w jaki sposób na przestrzeni lat rodziła się idea schematu, przy pomocy którego umysł ludzki *zbiera w jedno* różne elementy, określając w ten sposób klasy przedmiotów. Zostało także pokazane, że intuicyjne posługiwanie się tym schematem może prowadzić do antynomii. Niniejsza część tej pracy omówi poszczególne antynomie teoriomnogościowe. Warto w tym miejscu zaznaczyć, że sposób dochodzenia do wszystkich tych antynomii jest podobny jak w przypadku najpopularniejszej, zasygnalizowanej powyżej, antynomii Russella, stąd właśnie antynomii Russella zostanie tu poświęcone najwięcej uwagi.

2.1 Antynomia Russella (antynomia klas niezwrotnych)

Wzmianka o tej antynomii po raz pierwszy pojawiła się w korespondencji Russella z Fregem[30], natomiast bardziej formalnie antynomia została przedstawiona przez Russella w książce *The Principles of Mathematics*. Autor pisze: „Jeśli x jest dowolnym predykatem, wówczas x może być orzekane o sobie samym, lub nie może. Przypuśćmy, że predykatem będzie «nie jest orzekane o sobie samym». Wówczas sprzecznym samo w sobie byłoby twierdzić zarówno, że ów predykat jest, jak i że nie jest orzekany o sobie samym. Konkluzja w tym przypadku wydaje się oczywista: «nie orzekany o sobie samym» nie jest predykatem”[31]. W dalszej części tekstu Russell przenosi to rozumowanie na pojęcia ekstensjonalne (*class-concepts*) i na relacje.

Punktem wyjścia na drodze do antynomii Russella jest podział własności na te, które przysługują sobie samym oraz te, które sobie samym nie przysługują.

Niech własności nie przysługujące sobie samym nazywają się własnościami *normalnymi*. Przykładem własności normalnej w tym znaczeniu będzie zatem własność *być człowiekiem*. Widać wyraźnie, że podmiotem tej własności może

[30] Tamże, s. 18-19.
[31] B. Russell, *The Principles of Mathematics*, Londyn 1937, s. 102 (tłum. własne).

być tylko człowiek. Odniesienie tej własności do niej samej prowadzi do wyrażenia pozbawionego sensu: „Być człowiekiem jest człowiekiem".

Istnieją jednak własności, które przysługują sobie samym. Przykładem może być własność *być własnością*. Tego typu własność nie należy już zatem do *normalnych*.

Zamiast terminu *własność* można użyć terminu *zbiór*. Zbiorem normalnym będzie się nazywał taki zbiór, który nie jest swoim elementem. Zbiór ludzi jest zbiorem normalnym, ponieważ zbiór ludzi nie jest elementem zbioru ludzi (elementami zbioru ludzi są tylko ludzie). Z kolei zbiór wszystkich zbiorów nie jest zbiorem normalnym, ponieważ zbiór ten, aby był zbiorem wszystkich zbiorów musi zawierać również sam siebie (gdyby nie zawierał siebie, nie zawierałby już wszystkich zbiorów).

Do antynomii Russella prowadzi następujące rozumowanie[32]:

Niech W_0 będzie własnością: *być własnością normalną*.

Dla każdej własności W zachodzą twierdzenia:

T1: (W ma własność W_0) ≡ (W jest *własnością normalną*)

T2: (W nie ma własności W_0) ≡ (W nie jest *własnością normalną*)

Próbując odpowiedzieć na pytanie, czy W_0 jest czy nie jest *własnością normalną*, należy rozważyć dwie możliwości:

(a)

1.	W_0 jest własnością normalną	zał.
2.	W_0 nie przysługuje sobie samej	def. własności normalnej
3.	W_0 nie ma własności W_0	2
4.	W_0 nie jest własnością normalną	T2, 3
	sprzeczność: 1, 4	

(b)

1.	W_0 nie jest własnością normalną	zał.
2.	W_0 przysługuje sobie samej	def. własności normalnej
3.	W_0 ma własność W_0	2
4.	W_0 jest własnością normalną	T1, 3
	sprzeczność: 1, 4	

Obydwa założenia prowadzą do sprzeczności, czyli ani nie jest tak, że W_0 jest *własnością normalną*, ani nie jest tak, że W_0 nie jest *własnością normalną*, tymczasem na mocy prawa wyłączonego środka jeden z tych przypadków powinien zachodzić. W ten sposób otrzymano antynomię.

[32] Taki sposób formułowania antynomii Russella można znaleźć [w:] A. Mostowski, *Logika matematyczna: kurs uniwersytecki*, Warszawa-Wrocław 1948, s. 209.

O antynomii Russella mówi się głównie na gruncie teorii zbiorów. Punktem wyjścia jest tu zdefiniowanie klasy *N*, zawierającej wszystkie i tylko te zbiory, które nie są swoimi elementami[33]:

$$A \in N \equiv A \notin A$$

Podstawiając w tej definicji stałą *N* za zmienną *A*, otrzymuje się następującą równoważność:

(a) $$N \in N \equiv N \notin N$$

Na podstawie powyższej równoważności (a) można dowieść prawdziwości koniunkcji dwóch wyrażeń sprzecznych:

(b) $$N \in N \wedge N \notin N$$

Aby udowodnić prawdziwość wyrażenia (b), wystarczy najpierw przeprowadzić dowód prawdziwości pierwszego z wyrażeń składowych, po czym drugiego.

Dowód wyrażenia $N \ \ N \in N \ \ N$:

1. $N \notin N$ z.d.n.
2. $N \in N \equiv N \notin N$ (a)
3. $N \in N$ ROE: 2, 1

sprzeczność: 1, 3

Dowód wyrażenia $N \ \ N \notin N \ \ N$:

1. $N \in N$ z.d.n.
2. $N \in N \equiv N \notin N$ (a)
3. $N \notin N$ ROE: 2, 1

sprzeczność: 1,3

Skoro zostało udowodnione, że do tez systemu można dołączyć zarówno wyrażenie $N \in N$, jak również wyrażenie $N \notin N$, to można również dołączyć wyrażenie (b) $N \in N \wedge N \notin N$, co doprowadziło do antynomii.

[33] Por. J. Dadaczyński, *Antynomie teoriomnogościowe a powstanie klasycznych kierunków badania podstaw matematyki*, „Zagadnienia filozoficzne w nauce” 26 (2000) s. 43.

2.2. Antynomia zbioru wszystkich zbiorów (antynomia zbioru podzbiorów)

W dziewiętnastowiecznej teorii mnogości odkryto, że z danych elementów każdego zbioru można tworzyć różne jego podzbiory. Tym samym można także stwierdzić, że istnieje zbiór wszystkich podzbiorów danego zbioru *A*. Taki zbiór podzbiorów nazwano zbiorem potęgowym, oznaczając go symbolem 2^A lub $\wp(A)$. Pierwszą formalną definicję zbioru potęgowego podał Cantor.

Aby wykazać antynomię, trzeba najpierw przywołać tzw. twierdzenie Cantora, które głosi, że zbiór podzbiorów dowolnego zbioru *A* jest liczniejszy, niż sam zbiór *A* (czyli moc zbioru potęgowego zbioru *A* jest większa od mocy zbioru *A*), co zapisuje się w następującej postaci:

$$|A| < |2^A|$$

Zbiór wszystkich zbiorów jest to taki zbiór, którego elementami są wszystkie zbiory i tylko zbiory.

Do antynomii prowadzi podstawienie w pewniku abstrakcji za wyrażenie $\varphi(x)$ wyrażenia $X \in X$, co ma dać definicję zbioru wszystkich zbiorów:

$$\exists A \forall X (X \in A \equiv X = X)$$

Niech zatem *A* będzie zbiorem wszystkich zbiorów. Z samego założenia musi on być najliczniejszy ze wszystkich zbiorów, ponieważ wszystkie je obejmuje jako swoje elementy. Jednak na mocy twierdzenia udowodnionego przez Cantora, zbiór potęgowy zbioru *A* jest zawsze liczniejszy od samego zbioru *A*, stąd *A* jest i jednocześnie nie jest najliczniejszym spośród zbiorów, co stanowi antynomię[34].

Aksjomatyczna teoria mnogości w następujący sposób dowodzi nieistnienia zbioru wszystkich zbiorów[35]:
Tw.: Nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów *Z*

1.	Istnieje zbiór wszystkich zbiorów *Z*	z.d.n.
2.	$2^Z \subset Z$	1, def. *Z*
3.	$A \subset B \rightarrow |A| \leq |B|$	tw.[36]
4.	$2^Z \subset Z \rightarrow |2^Z| \leq |Z|$	3: $A/2^Z$, B/Z

[34] Por. W. Marciszewski, *Antynomie w logice*, [w:] Tenże, *Mała encyklopedia logiki*, Wrocław-Warszawa-Kraków 1970, s. 12.
[35] Por. L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, Lublin 1991, s. 266.
[36] Dowód twierdzenia [w:] tamże s. 257-258.

5. $\left|2^Z\right| \leq |Z|$ RO: 4, 2

6. $|Z| < \left|2^Z\right|$ tw. Cantora

7. $\left|2^Z\right| \leq |Z| \wedge |Z| < \left|2^Z\right|$ DK: 5, 6

8. $\neg(m \leq n \wedge n < m)$ tw.[37]

9. $\neg\left(\left|2^Z\right| \leq |Z| \wedge |Z| < \left|2^Z\right|\right)$ 8: $m/|2^Z|$, $n/|Z|$

sprzeczność: 7, 9

2.3. Antynomia zbioru uniwersalnego

Mianem zbioru uniwersalnego określa się taki zbiór, że każdy przedmiot jest jego elementem, a więc jest w nim zawarty każdy zbiór[38].

Do antynomii prowadzi w tym wypadku podstawienie w pewniku abstrakcji za wyrażenie $\varphi(x)$ wyrażenia $x \in x$, co ma dać definicję zbioru uniwersalnego:

$$\exists V \forall x (x \in V \equiv x = x)$$

Skoro w zbiorze uniwersalnym jest zawarty każdy przedmiot, to moc zbioru uniwersalnego powinna być największą liczbą kardynalną. Z drugiej jednak strony z twierdzenia Cantora wynika, że dla każdej liczby kardynalnej istnieje liczba kardynalna od niej większa, a więc moc zbioru uniwersalnego nie jest największą liczbą kardynalną, bo takowa nie istnieje. W ten sposób otrzymano, że moc zbioru uniwersalnego jest i nie jest jednocześnie największą liczbą kardynalną, co stanowi antynomię.

Aksjomatyczna teoria mnogości podaje dowód nieistnienia zbioru uniwersalnego. Dowód ten jest analogiczny do dowodu nieistnienia zbioru wszystkich zbiorów[39]:

Tw.: Nie istnieje zbiór uniwersalny *V*

1. Istnieje zbiór uniwersalny *V* z.d.n.

2. $2^V \subset V$ 1, def. *V*

3. $A \subset B \rightarrow |A| \leq |B|$ tw.[40]

---

[37] Tamże, s. 258.

[38] Tamże, s. 266.

[39] Por. tamże.

[40] Dowód twierdzenia tamże, s. 257-258.

4. $2^V \subset V \rightarrow \left|2^V\right| \leq |V|$ 3: $A/2^V$, B/V

5. $\left|2^V\right| \leq |V|$ RO: 4, 2

6. $|V| < \left|2^V\right|$ tw. Cantora

7. $\left|2^V\right| \leq |V| \wedge |V| < \left|2^V\right|$ DK: 5, 6

8. $\neg(m \leq n \wedge n < m)$ tw.[41]

9. $\neg\left(\left|2^V\right| \leq |V| \wedge |V| < \left|2^V\right|\right)$ 8: $m/|2^V|$, $n/|V|$

sprzeczność: 7, 9

Należy zauważyć, że antynomia zbioru wszystkich zbiorów *A* i zbioru uniwersalnego *V* pozornie niczym się nie różnią – podstawienie pewnika abstrakcji wygląda bardzo podobnie:

(a) $$\exists A \forall X (X \in A \equiv X = X)$$

(b) $$\exists V \forall x (x \in V \equiv x = x)$$

W schemacie (a) jednak za zmienną *X* może być podstawiona tylko nazwa przedmiotu będącego zbiorem, podczas gdy w schemacie (b) za zmienną *x* można podstawić nazwę dowolnego przedmiotu.

2.4 Antynomia największej liczby porządkowej (Burali-Fortiego)

Jak zaznaczono w pierwszym rozdziale, chronologicznie jest to pierwsza antynomia. Została odkryta przez samego Cantora, a światło dzienne ujrzała dzięki włoskiemu matematykowi C. Burali-Forti[42].

Do antynomii prowadzi następujące rozumowanie[43]:

1. Niech *W* oznacza zbiór wszystkich liczb porządkowych
2. Każdy zbiór liczb porządkowych jest dobrze uporządkowany tw.[44]

[41] Zob. tamże, s. 258.

[42] Zob. tamże, s. 20.

[43] Por. L. Gruszecki, *U źródeł pojęć mnogościowych*, Lublin 2005, s. 254. Zob. też C. Burali-Forti, *A question on transfinite numbers*, [w:] van Heijenoort J. [red.], *From Frege to Gödel*, s. 104-112.

[44] Dowód tego twierdzenia [w:] R. Murawski, K. Świrydowicz, *Wstęp do teorii mnogości*, Poznań 2006, s. 158.

3.	Zbiór W jest dobrze uporządkowany	1, 2
4.	Zbiorowi W odpowiada pewna liczba porządkowa b	3
5.	$\forall(\alpha \in W)(\beta > \alpha)$	własność liczb porządkowych
6.	$\beta \notin W$	5
7.	$\beta \in W$	1
	sprzeczność: 6, 7	

2.5. Antynomia zbioru wszystkich liczb kardynalnych

Kolejną antynomią, powstałą na gruncie naiwnej teorii mnogości, jest antynomia zbioru wszystkich liczb kardynalnych. Liczbą kardynalną nazywa się liczbę wyrażającą moc zbioru, tzn. ilość elementów w danym zbiorze.

Niech K będzie zbiorem wszystkich liczb kardynalnych. Dla każdego zbioru liczb kardynalnych istnieje liczba kardynalna większa od każdej liczby należącej do tego zbioru[45]. Z powyższego twierdzenia wynika, że i dla zbioru K istnieje liczba kardynalna n większa od każdej liczby kardynalnej należącej do tego zbioru. Jeśli jednak zbiór K zawiera wszystkie liczby kardynalne, to musiałby zawierać również liczbę największą. Skoro tak, to nie da się znaleźć liczby n większej od niej.

Jeśli z kolei zbiór K nie zawierałby największej liczby kardynalnej, znaczyłoby to, że nie zawiera on wszystkich liczb kardynalnych, co jest niezgodne z założeniem.

Dochodzi się zatem do sprzeczności. Rozumowanie prowadzące do antynomii zbioru wszystkich liczb kardynalnych jest jednocześnie dowodem nieistnienia zbioru wszystkich liczb kardynalnych (który to zbiór był przyjmowany przez klasyczną teorię mnogości).

Odpowiedzialnym za powstanie powyższych antynomii okazuje się pewnik definicyjny w postaci, zaprezentowanej już w pierwszym rozdziale:

$$\exists Z \forall x[x \in Z \equiv \varphi(x)]$$

Jest to schemat, który daje się uściślać na różne sposoby w zależności od tego, jakie wzory czy napisy uzna się za funkcje zdaniowe. Jeśli jako funkcje zdaniowe dopuści się wszelkie możliwe napisy, to z praw rachunku zdań i rachunku kwantyfikatorów wyniknie negacja pewnych szczególnych przypadków zastosowania pewnika definicyjnego. Przykładem tego może być antynomia Russella, która dowodzi, że gdyby istniał zbiór wszystkich zbiorów „normalnych”[46], to zbiór ten byłby i zarazem nie byłby swoim elementem.

[45] Dowód tego twierdzenia [w:] L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, s. 270.

[46] *Normalny* w znaczeniu podanym w punkcie 2.1 niniejszej pracy.

Rozumowanie przeprowadzone w antynomii Russella stanowi dowód następującej implikacji:

$$\exists W \forall X[X \in W \equiv \neg(X \in X)] \rightarrow \exists W[(W \in W) \wedge \neg(W \in W)]$$

Z implikacji tej, po zastosowaniu prawa transpozycji i prawa de Morgana, otrzymuje się implikację:

$$\forall W\left[\neg(W \in W) \vee (W \in W)\right] \rightarrow \neg\{\exists W \forall X\left[X \in W \equiv \neg(X \in X)\right]\}$$

Po oderwaniu poprzednika pozostaje:

$$\neg\{\exists W \forall X\left[X \in W \equiv \neg(X \in X)\right]\}$$

W ten sposób została udowodniona negacja pewnego specjalnego przypadku pewnika definicyjnego[47], a mianowicie pokazano, że nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów, które nie są swoimi własnymi elementami. Można stąd wyciągnąć wniosek, że w schemacie pewnika definicyjnego funkcją zdaniową $\varphi(x)$ nie może być każdy dowolny napis. To odkrycie dało impuls do znalezienia sposobów usunięcia antynomii powstałych w teorii mnogości. Sposoby te zostaną zaprezentowane w kolejnej części pracy.

3. Sposoby usuwania antynomii

Próby usunięcia antynomii, a tym samym zbudowania spójnych podstaw matematyki, były w naukach matematycznych stymulatorem wielu poszukiwań. Rezultatem tych poszukiwań stały się takie filozoficzne prądy jak logicyzm, intuicjonizm i formalizm. Nurty te (szczególnie logicyzm i formalizm) korzystały z aparatu technicznego, którego dostarczyła powstała na przełomie XIX i XX wieku logika matematyczna[48].

Dość szybko zauważono, że źródłem teoriomnogościowych antynomii jest równoczesne przyjęcie dwóch założeń. Pierwsze z tych założeń to nieograniczony aksjomat komprehensji stwierdzający, że dla każdego warunku sensownego (dla każdej formy zdaniowej) istnieje zbiór wszystkich i tylko tych przedmiotów,

[47] Por. A. Mostowski, *Logika matematyczna: kurs uniwersytecki*, Warszawa-Wrocław, 1948, s. 210.
[48] Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki,* s. 68.

które spełniają ten warunek. Drugie założenie to przyjęcie, że sensowna jest forma zdaniowa o postaci $\neg(A \in A)$ stwierdzająca, że zbiór A nie jest swoim elementem. Przyjmując te założenia, wprowadza się definicję zbioru wszystkich i tylko tych zbiorów, które nie są swoimi elementami, co prowadzi do antynomii. Aby usunąć te antynomie trzeba zatem bądź ograniczyć aksjomat komprehensji, bądź przyjąć ograniczenie dotyczące sensowności wyrażeń. Pierwszy sposób jest stosowany w systemach aksjomatycznej teorii mnogości, a drugi w teorii typów logicznych[49]. Te dwie teorie zostaną zaprezentowane poniżej.

3.1. Teoria typów

Teoria typów jest systemem logicznym pochodzącym od Whiteheada i Russella. System ten obejmuje rachunek zbiorów i teorię relacji. Choć teorię typów Russell przedstawił najpierw w *The Principles of Mathematics* z 1903 r., to znalazła ona swój dojrzały wyraz dopiero pięć lat później w jego artykule *Mathematical Logic as Based on the Theory of Types* opublikowanym w *American Journal of Mathematics*, nr 30 (1908), a dopiero potem w monumentalnym dziele, stworzonym wraz z Whiteheadem, *Principia Mathematica* (1910 – 1913). Teoria typów pojawiła się w dwóch wersjach: prostej (1903) i rozgałęzionej (1908)[50].

Russell nigdy nie ukrywał, że zadanie stworzenia systemu wolnego od antynomii przysporzyło mu sporo kłopotów i trwało kilka lat. O swojej drodze do rozwiązania tego problemu napisał w książce pt. *Mój rozwój filozoficzny* (wydanej w 1959 r.). Naszkicował tam, jaki sposób rozumowania doprowadził go do zamierzonego celu. Zauważył, że gdy stwierdza się wszystkie wartości funkcji *fx*, jeżeli to, co się stwierdza, ma być określone, to wartość, jaką x może przybrać, musi być również określona. Inaczej mówiąc, musi istnieć pewna *totalność* możliwych wartości x. Jeżeli tworzy się nowe wartości określone w terminach tejże *totalności*, to wydaje się ona *rozszerzać* i w ten sposób nowe wartości, odnoszące się do niej, będą się odnosiły do owej *rozszerzonej totalności*. Ale, jak zauważa Russell, ponieważ wartości te muszą się w niej zawierać, nie może ona nigdy ich *dogonić*. Ten proces autor porównuje do skakania na cień własnej głowy. Dalej przywołuje on antynomię kłamcy. Twierdzi, że trzeba zawsze rozróżniać między twierdzeniami, które odnoszą się do jakiejś całości twierdzeń i twierdzeniami, które się do niej nie odnoszą. Tu trzeba wprowadzić ważne ograniczenie, polegające na tym, że twierdzenia o całości twierdzeń, nigdy nie mogą być tej całości elementami. Zatem kłamca powinien powiedzieć: „Wypowiadam teraz fałszywe twierdzenie pierwszego stopnia, które jest fałszywe". Wypowiedź ta jednak jest

[49] L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, s. 215.
[50] Zob. http://plato.stanford.edu/entries/russell-paradox/ (21.03.2011).

sama w sobie twierdzeniem drugiego stopnia. Kłamca nie wypowiada więc żadnego twierdzenia pierwszego stopnia, stąd to, co mówi, jest po prostu fałszem, i dowód, że jest jednocześnie prawdą – upada.

„Okazuje się, że we wszystkich paradoksach logicznych istnieje jakiś rodzaj samozwrotności, który należy zakwestionować na tej samej podstawie, to znaczy, że zakłada jako element całości coś odnoszącego się do tej całości, co może mieć określone znaczenie tylko pod warunkiem, że całość została już przedtem ustalona”[51].

Principia Mathematica dało odpowiedź na pytanie o możliwość budowy spójnych podstaw matematyki. Autorzy opisali teorię typów, na gruncie której antynomie już nie zachodziły, ponieważ zdania antynomialne nie były tam zdaniami sensownymi. Teoria typów została później gruntownie zreformowana przez Leona Chwistka i Franka Plumptona Ramseya. To właśnie od Ramseya pochodzi podział antynomii na:

(a) logiczne: antynomia Russella, antynomia zbioru wszystkich zbiorów, antynomia Burali-Fortiego,
(b) semantyczne: antynomia kłamcy, antynomia Richarda, antynomia Bary'ego.

Rozgałęzioną teorię typów zastąpiła z czasem prosta teoria typów sformułowana przez Chwistka i Ramseya. Okazało się, że założenia prostej teorii typów są wystarczające, by usunąć antynomie logiczne i teoriomnogościowe[52]. Z tego powodu jedynie prosta postać teorii typów zostanie zaprezentowana w niniejszej pracy.

Prosta teoria typów bierze pod uwagę dwa rodzaje przedmiotów: indywidua oraz różnego rodzaju relacje. Szczególnym przypadkiem są relacje jednoargumentowe, które można nazwać *własnościami* lub *zbiorami*. Niech *R(x)* będzie relacją jednoargumentową *x jest koniem*. Wówczas *bycie koniem* jest zarówno własnością każdego indywiduum, spełniającego relację *R*, jak i określa zbiór, którego elementami są przedmioty spełniające relację *R*.

Teoria typów swą nazwę wzięła stąd, że *hierarchizuje* ona przedmioty, różnicując ich typy:

(a) indywidua – typ *,
(b) relacje jednoczłonowe, własności lub zbiory przedmiotów najniższego typu czyli indywiduów – typ (*),
(c) relacje dwuczłonowe zachodzące między przedmiotami najniższego typu – typ (*,*),

[51] B. Russell, *My Philosophical Development*, Londyn 1975, s. 62-63. Także [w:] R. Murawski, *Filozofia matematyki*, s. 263-264.

[52] Antynomie semantyczne usuwa się za pomocą reformy języka niezależnej od idei podziału na typy. Zob. L. Chwistek, *Antynomie logiki formalnej*, „Przegląd Filozoficzny” 24 (1921) s. 164-171.

(d) relacje *k*-członowe zachodzące między przedmiotami najniższego typu – typ $(*_1,*_2,*_{3,\dots,}*_k)$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

Oprócz tego typy logiczne dzielą się na rzędy. Rząd typu określa się na drodze indukcyjnej. Do rzędu 0 należy tylko typ indywiduów. Do rzędu *n*-go należą typy relacji, których członami są przedmioty o typach rzędu $k < n$ i takie, że przynajmniej jeden z tych członów jest przedmiotem typu należącego do rzędu *(n-1)*-go[53]. W sposób uproszczony przedstawia to poniższa tabela:

Tabela 1. Przykłady typów relacji poszczególnych rzędów

Rząd	Przykłady typów relacji
0	*
1	(*), (*,*), (*,*,*), (*,*,*,*)
2	((*)), ((*,*)), ((*,*,*)), ((*),(*,*)), ((*),*), ((*,*),*,*), (*, (*,*),*), ((*),(*,*),*)
3	(((*))), (((*,*))), (((*),(*,*))), (((*)), (*)), (((*),*,*),*,*)
...	...

Autonomicznym fragmentem teorii typów, ważnym z punktu widzenia tej pracy, jest ogólna teoria klas. Jest ona fragmentem teorii typów dlatego, że rozważa się w niej tylko indywidua i relacje jednoargumentowe, czyli zbiory. Ważne jest tu zastrzeżenie, że elementami zbiorów mogą być przedmioty rzędu dokładnie o jeden niższego od rzędu zbiorów, co przedstawia poniższa tabela:

Tabela 2. Przykłady typów odpowiadających różnym rzędom w teorii klas

Rząd	0	1	2	3	4	...
Typ	*	(*)	((*))	(((*)))	((((*))))	...

Mostowski zauważa, że podział przedmiotów na typy jest bardzo naturalny. Nie jest on obcy także gramatyce, która „odróżnia rzeczowniki (nazwy indywiduów) od przymiotników i czasowników (nazw własności), przy czym jedno i to samo słowo zazwyczaj nie należy jednocześnie do obu tych części mowy (przynajmniej w większości języków europejskich)"[54].

W jaki sposób prosta teoria typów rozwiązuje problem teoriomnogościowych antynomii? Jak zostało wspomniane na początku tego rozdziału, teoria typów jest dziedziną, która wprowadza pewne ograniczenie dotyczące sensowności wyrażeń. Zgodnie z jej kryteriami, wyrażeniem sensownym o postaci $x^k \in^m y^n$, gdzie *k, m, n* są oznaczeniami typów, może być tylko takie wyrażenie, w którym $m = n = (k+1)$, to znaczy, że przedmiot danego typu może należeć tylko

[53] Por. H. Stonert, *Teoria typów, prosta*, [w:] W. Marciszewski [red.], *Mała Encyklopedia Logiki*, Wrocław-Warszawa-Kraków, 1970, s. 318-319.

[54] A. Mostowski, *Logika matematyczna: kurs uniwersytecki*, s. 206.

do takiego zbioru, którego typ jest o jeden wyższy, niż typ tego przedmiotu. W przeciwnym wypadku wyrażenie jest bezsensowne – jest to zestawienie znaków „mające tylko z pozoru gramatyczną postać zdania”[55] i mogące prowadzić do antynomii. Wyraźnie to widać, próbując na gruncie teorii typów zbudować antynomię Russella. Aby to uczynić, trzeba by najpierw zapisać aksjomat komprehensji w postaci odpowiadającej teorii typów:

$$\exists Z^k \forall X^m \left[X^m \in^k Z^k \equiv \varphi(X^m) \right]$$

Zgodnie z kryteriami teorii typów, w powyższym wyrażeniu $k = (m+1)$, a zatem:

$$\exists Z^{m+1} \forall X^m \left[X^m \in^{m+1} Z^{m+1} \equiv \varphi(X^m) \right]$$

Antynomię Russella buduje się definiując klasę zawierającą wszystkie i tylko te zbiory, które nie są swoimi elementami, czyli:

$$X^m \in^{m+1} Z^{m+1} \equiv X^m \notin^{m+1} X^m$$

Ten krok, jednak, prowadzi do powstania po prawej stronie równoważności wyrażenia, które jest bezsensowne:

$$X^m \notin^{m+1} X^m$$

Zbiór typu *m* może należeć tylko do zbioru typu *m+1*, a nie, jak powyżej, do zbioru typu *m*. Nie da się tym samym w teorii typów doprowadzić zarówno do antynomii Russella, jak i do pozostałych antynomii, których konstrukcja jest analogiczna. Za wyrażenie $\varphi(x)$ w pewniku definicyjnym nie wolno podstawiać każdego dowolnego napisu.

W przypadku antynomii zbioru uniwersalnego, czy zbioru wszystkich zbiorów, wyrażenie mówiące, że zbiór uniwersalny (lub zbiór podzbiorów) V^n jest zawarty w zbiorze V^n jest bezsensowne, ponieważ zbiór uniwersalny (lub zbiór podzbiorów) V^n musi być zbiorem typu *n+1*. Trzeba by zatem zapisać: $V^{n+1} \subset^n V^n$, co jest niezgodne z założeniami teorii typów[56].

Mimo że teoria typów przezwycięża problem antynomii, nie jest ona wolna od pewnych kłopotliwych ograniczeń. Jednym z nich jest tzw. systematyczna

[55] Tamże, s. 214.

[56] Zawieranie się zbioru (oznaczone symbolem $\subset$) podlega w teorii typów tym samym regułom, co właściwość należenia do zbioru ($\in$), a zatem symbol zawierania w teorii typów powinien być również za każdym razem opatrzony stosowym indeksem, wskazującym na typ zawierania: $\subset^n$.

wieloznaczność pojęć. Polega ona na tym, że na przykład przy próbie zdefiniowania relacji inkluzji relację tę można określić zarówno dla zbiorów typu (*), jak i dla zbiorów typu ((*)) itd. Każdą z tych relacji trzeba jednak zdefiniować w inny sposób i przeprowadzić dla niej odrębny dowód. Forma tych definicji i przebieg dowodów są za każdym razem prawie takie same. Jedyną różnicą jest to, że zmienne jednego typu zastępuje się zmiennymi innego typu. Tą samą niedogodnością jest tu obarczone także pojęcie zbioru pustego: zbiór pusty typu (*) jest tu czymś innym, niż zbiór pusty typu ((*)).

Kolejny problem to niemożliwość rozważania własności, które przysługują zarówno indywiduom, jak i zbiorom indywiduów, zbiorom takich zbiorów itd., tymczasem w matematyce istnieje potrzeba takich analiz[57].

Te i inne ograniczenia sprawiły, że współczesna teoria mnogości nie jest budowana na gruncie teorii typów logicznych.

3.2 Aksjomatyzacja teorii mnogości

Pierwszej aksjomatyzacji teorii mnogości dokonał Ernst Zermelo. W roku 1908 zamieścił on w czasopiśmie *Mathematische Annalen* pracę zatytułowaną *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*. We wprowadzeniu do tej pracy pisał: „Mając na uwadze antynomię Russella [...] zbioru wszystkich zbiorów, które nie są własnymi elementami, nie wydaje się dłużej możliwe przypisywanie dowolnemu logicznie definiowalnemu pojęciu jakiegoś zbioru lub klasy jako zakresu. Ogólna Cantorowska definicja zbioru (1895) jako «zebrania w jedną całość dobrze odróżnionych przedmiotów naszego oglądu czy naszych myśli» zatem z pewnością wymaga pewnych ograniczeń. W tych okolicznościach nie pozostaje nic innego jak podążać w przeciwnym kierunku i, zaczynając od teorii zbiorów jako historycznie danej, poszukiwać zasad potrzebnych dla ustanowienia fundamentów tej dyscypliny matematycznej"[58].

Zermelo podał siedem aksjomatów, które nie prowadzą do znanych antynomii. Miał on zwyczaj opisywania swoich twierdzeń słowami, nie używając języka symbolicznego.

I. Aksjomat ekstensjonalności: Jeśli dowolny element zbioru M jest także elementem zbioru N i vice versa, jeśli zatem zarazem $M \subset N$ i $N \subset M$, wtedy zawsze $M = N$; lub krócej: każdy zbiór jest określony przez swoje elementy[59].

[57] Zob. A. Mostowski, *Logika matematyczna: kurs uniwersytecki*, s. 219-220.

[58] E. Zermelo, *Investigations in the foundations of set theory*, [w:] J. van Heijenoort [red.], *From Frege to Gödel*, s. 200 (tłum. za L. Gruszecki, *U źródeł pojęć mnogościowych*, s. 259).

[59] $M \subset N \equiv \forall x(x \in M \to x \in N)$

II. Aksjomat zbiorów elementarnych: Istnieje pewien (fikcyjny) zbiór, zbiór pusty 0, który nie zawiera żadnych elementów. Jeśli a jest pewnym przedmiotem dziedziny, to istnieje zbiór $\{a\}$ zawierający a i tylko a jako swój element; jeśli a i b są dwoma obiektami dziedziny, to zawsze istnieje zbiór $\{a,b\}$ zawierający jako elementy a i b, ale nie zawierający żadnego przedmiotu x różnego od a i b.

III. Aksjomat wyróżniania: Jeśli tylko funkcja zdaniowa $\mathfrak{E}(x)$ jest określona dla wszystkich elementów zbioru M, to M posiada podzbiór $M_{\mathfrak{E}}$ zawierający jako elementy dokładnie te elementy x zbioru M, dla których $\mathfrak{E}(x)$ jest zdaniem prawdziwym.

IV. Aksjomat zbioru potęgowego: Dowolnemu zbiorowi T odpowiada inny zbiór $\mathfrak{U}T$, zbiór potęgowy zbioru T, który zawiera jako elementy dokładnie wszystkie podzbiory T.

V. Aksjomat sumy: Dowolnemu zbiorowi T odpowiada zbiór $\mathfrak{S}T$, suma zbioru T, który zawiera jako elementy dokładnie wszystkie elementy elementów zbioru T.

VI. Aksjomat wyboru: Jeśli T jest zbiorem, którego elementami są zbiory różne od zbioru 0 i wzajemnie rozłączne, to jego suma $\mathfrak{S}T$ zawiera przynajmniej jeden podzbiór S_1 mający jeden i tylko jeden element wspólny z każdym elementem zbioru T.

VII. Aksjomat nieskończoności: Istnieje w dziedzinie co najmniej jeden zbiór Z, który zawiera zbiór pusty jako swój element i jest tak utworzony, że każdemu z jego elementów a odpowiada dalszy element postaci $\{a\}$; inaczej mówiąc, jest to zbiór, który wraz z każdym elementem a zawiera również odpowiadający mu zbiór $\{a\}$ jako element[60].

Należy zauważyć, że aksjomat III (aksjomat wyróżniania) jest poprawioną wersją aksjomatu komprehensji i można go zapisać w następujący sposób:

$$\forall B \exists A \forall x (x \in A \equiv x \in B \wedge \varphi(x))$$

Aksjomat powyższy stwierdza, że dla każdego warunku sensownego $\varphi(x)$ i dla każdego zbioru B istnieje podzbiór zbioru B złożony z tych i tylko tych elementów zbioru B, które spełniają warunek $\varphi(x)$. Na tej podstawie zamiast definicji zbioru tych zbiorów, które nie są swoimi elementami, otrzymuje się równoważność:

$$A \in R \equiv A \in B \wedge \neg A \in A$$

[60] E. Zermelo, *Investigations in the foundations of set theory*, [w:] J. van Heijenoort [red.], *From Frege to Gödel*, s. 201-204.

To nie prowadzi do antynomii, gdyż podstawienie za zmienną *A* stałej *R* daje równoważność:

$$R \in R \equiv R \in B \wedge \neg R \in R$$

Z równoważności tej wynika tylko, że $\neg R \in B$.

Zadaniem aksjomatu wyróżniania jest zatem ograniczenie *rozmiaru* zbiorów wprowadzanych przez funkcję $\varphi(x)$. Zbiory mogą być wprowadzane tylko jako podzbiory już istniejących zbiorów[61].

Teoria typów i aksjomatyka teorii Zermelo nie są jedynymi drogami, na których próbowano uniknąć antynomii. W jednej z alternatywnych teorii mnogości powstał pomysł, by odróżnić dwa rodzaje wielości: zbiory i klasy. Każdy zbiór jest klasą, lecz nie każda klasa jest zbiorem: „[...[«Zbiory» są to [takie] zbiory, które (we wcześniejszej terminologii) nie są «za duże», a «klasy» są to wszystkie wielości (Gesamtheiten) niezależnie od swojego «rozmiaru». Klasa może być argumentem wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiorem"[62]. Ogólnie mówiąc, klasa wtedy jest zbiorem, gdy jest elementem jakiejś klasy. W ten sposób system von Neumanna-Bernaysa-Gödla dowodzi, że pewne klasy nie są zbiorami, np. klasa uniwersalna, klasa wszystkich zbiorów, klasa wszystkich liczb porządkowych. Żadna klasa nie może być argumentem *X* w wyrażeniu typu $X \in Y$, czy też w wyrażeniu $X \subset Y$, więc nie da się zbudować przy ich pomocy antynomii.

Dziś powszechnie przyjmuje się teorię ZFC (czyli Zermelo-Fraenkla z aksjomatem wyboru). Na jej kształt miała wpływ przede wszystkim praktyka matematyczna. Nie znaczy to, że nie istnieją inne systemy. Wręcz przeciwnie: można mówić o „wielu teoriach mnogości”, które próbują ująć w system aksjomatyczny różne wcześniejsze sposoby użycia terminów mnogościowych. Niewątpliwie jednak problemowi znalezienia solidnych podstaw matematyki zaradzono skutecznie.

Zakończenie

Celem niniejszej pracy było pokazanie roli, jaką odegrał aksjomat komprehensji w dziejach teorii mnogości. Z jednej strony konsekwencje omawianego aksjomatu zburzyły podstawy, na których próbowano w początku dwudziestego

[61] Por. L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, s. 218.

[62] J. von Neumann, *An axiomatization of set theory*, [w:] J. van Heijenoort [red.], *From Frege to Gödel*, s. 403 (tłum. własne).

wieku budować teorię mnogości, z drugiej, natomiast, aksjomat ten dał impuls do wypracowania w teorii zbiorów bardziej precyzyjnych rozwiązań.

Chronologicznie można wyróżnić trzy etapy refleksji nad użytecznością pewnika abstrakcji. Najpierw wydawał się on być skutecznym wynalazkiem, mogącym służyć za przydatne narzędzie myślenia nie tylko na płaszczyźnie zdroworozsądkowej, lecz również na gruncie filozofii, teorii mnogości czy matematyki. Jeśli chodzi o teorię mnogości, stanął on u samych jej podstaw, definiując zbiór w ogólności (a to przecież właśnie od definicji zbioru i relacji należenia teoria mnogości się zaczyna). Na tym pierwszym etapie rola aksjomatu komprehensji była zatem pozytywna.

Drugi etap to zawód związany z niespełnionymi oczekiwaniami matematyków, którzy wykryli, że aksjomatu komprehensji nie wolno używać we wszystkich sytuacjach bez żadnych ograniczeń, ponieważ niekiedy może prowadzić on do antynomii. Choć jego intuicyjne zastosowanie nie rodziło wcześniej większych komplikacji, to aksjomat ten zastosowany w naukach formalnych okazał się być zawodnym. Na tym etapie rozwoju teorii zbiorów nie patrzono na aksjomat komprehensji zbyt przychylnym wzrokiem. Pojawiło się pytane, czy jest jeszcze sens go utrzymywać, czy też trzeba go radykalnie odrzucić. Zaczęto podejrzewać, że zawodną może okazać się cała ówczesna matematyka oraz że, być może, nauka budowała przez lata matematyczną wieżę Babel, która teraz chwiejąc się w podstawach, grozi zawaleniem. Z czasem powstały jednak pomysły, które pozwoliły bardziej optymistycznie spojrzeć na przyszłość matematyki.

Na trzecim etapie ewolucji teorii zbiorów odkryto, że intuicje, jakie wyraża aksjomat komprehensji, są właściwe, stąd nie trzeba z nich definitywnie rezygnować – wystarczy je tylko uściślić. W ten sposób sformułowano w miejsce aksjomatu komprehensji aksjomat wyróżniania, który głosił niemal to samo, ale nie był już źródłem antynomii. Innym sposobem uniknięcia antynomii stała się teoria typów, która przyjmowała niezmieniony aksjomat komprehensji, lecz jego stosowanie było rygorystycznie obwarowane. Zarówno w przypadku teorii typów, jak i aksjomatyzacji teorii mnogości, metodę usunięcia antynomii znamionował ten sam pomysł: niedopuszczenie do samozwrotności. To coś w rodzaju wykluczenia przypadku Barona Münchhausena – bohatera literackiego, który, wbrew wszelkim prawom, miał podobno sam siebie wyciągnąć za włosy z bagna. Podobnego porównania użył sam Russell, gdy opowiadał, jak zdemaskował błąd w rozumowaniu prowadzącym do antynomii – mówił, że samozwrotność to jak skakanie na cień własnej głowy: gdy się na niego wskoczy, już się na nim nie jest.

Warto zauważyć, że samozwrotność doprowadziła także do powstania antynomii semantycznych, których analiza mogłaby być rozwinięciem niniejszej pracy. Można by również kontynuować myśli związane z ideą istnienia (nieistnienia) zbioru wszystkich zbiorów, czy zbioru uniwersalnego, i spróbować wskazać, jakie znaczenie miałoby to istnienie (nieistnienie) dla współczesnej matematyki. Godne uwagi jest prześledzenie, w jaki sposób przyjęcie określonego sposobu uprawiania teorii mnogości wpływa na stanowisko danego autora w sporze o uniwersalia.

Próbując ostatecznie ocenić rolę aksjomatu komprehensji w rozwoju teorii zbiorów, można śmiało powiedzieć, że mimo wszystko jest ona pozytywna. Chociaż stał się on solą w oku dla niejednego matematyka, to przecież przyczynił się do znalezienia i wyeliminowania wielu błędów. Wypada więc na koniec zawołać, parafrazując liturgiczny tekst: „O szczęśliwa wina, skoro dała się zgładzić tak wielkiemu odkryciu".

Summary

The Role of the Comprehension Axiom in Development of the Set Theory

The publication of Georg Cantor's „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen" in the 1874 gave birth to the new scientific discipline – set theory. One of the main points of the Cantor's theory was the axiom of comprehension which states that for any formula there exists a set consisting of only those elements that satisfy this formula. This axiom played a significant role in the development of the set theory in the 19th and 20th centuries. On the one hand it seemed indispensable for a consistence of theory, but on the other it turned out to be a „saboteur" that destroyed the very basis of mathematics. The paper presents the origins and the importance of comprehension axiom: its applications and dangers that it brings. It attempts also to answer the question whether is this axiom indeed indispensable in the set theory or it could (or even should) be replaced with some other formula.