Studia Paradyskie, t. 24, 2014, s. 127–142

Krzysztof Jaworski
Lublin

Aksjomat regularności a regularność zbioru

Wstęp

Aksjomat regularności (zwany także aksjomatem ufundowania) pojawił sie na gruncie teorii mnogości w związku z potrzebą wykluczenia z pola rozważań zbiorów nieufundowanych. Pierwszych śladów tego aksjomatu można się doszukać w artykule Johna von Neumanna *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre* z 1925 r.[1]. Autor artykułu zauważa, iż komplet aksjomatów, zaproponowanych w 1908 r. przez Ernsta Zermelo, wcale nie gwarantuje, że oprócz zbiorów „pożądanych" nie pojawią się w dziedzinie także zbiory „zbyteczne" typu:

$$A = \{A\}$$

lub też:

$$A_1 = \{A_2\}, \quad A_2 = \{A_3\}, \ \ldots$$

Aby wypełnić aksjomatyczną „lukę", von Neumann przywołuje sformułowany kilka lat wcześniej przez Abrahama Fraenkla tzw. aksjomat ograniczenia, głoszący, że nie istnieją żadne inne zbiory oprócz tych, których istnienie da się wywieść z aksjomatów[2]. Von Neumann dokłada wszelkich starań, by aksjomat regularności przedstawić w możliwie formalny sposób[3].

Do systemu Zermelo pewnik ufundowania zostaje dołączony dopiero w roku 1930. W uzasadnieniu swojej decyzji matematyk stwierdza: „[Aksjomat

[1] Warto zauważyć, że idea wykluczenia z teorii mnogości zbiorów *anormalnych* pojawiła się także u Mirimanoffa (1917-1920).

[2] Zob. A. Fraenkel, *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*, „Mathematische Annalen" 86 (1922) s. 230-237.

[3] Zob. J. von Neumann, *An axiomatization of set theory*, [w:] J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, Cambridge 1967, s. 403-405.

ufundowania], który wyklucza wszystkie zbiory cyrkularne: w szczególności zbiory będące swoimi własnymi elementami oraz zbiory pozbawione korzeni, zawsze był spełniony w teoriomnogościowej praktyce i stąd, jak na razie, nie prowadzi do istotnego ograniczenia teorii"[4]. Od tego momentu aksjomat ten jest obecny w teorii mnogości aż po dziś dzień, a jego zadaniem ma być gwarancja intuicyjnej struktury zbiorów.

Okazuje się jednak, że świat nauki nie jest zgodny co do słuszności przyjmowania tego pewnika. Badacze zwykle obierają względem niego jedną z dwóch postaw. Pierwsza grupa to ci, którzy są przekonani, że aksjomat regularności jest fundamentalny dla rozumienia pojęcia zbioru, a więc jest on jedną z najważniejszych formuł teorii. Inni z kolei twierdzą że, w odróżnieniu od pozostałych aksjomatów teorii ZFC, aksjomat ufundowania nie wyraża żadnych powszechnie akceptowanych matematycznych zasad i jest on tylko jednym z nieszkodliwych elementów higieny logika[5].

1. Zbiory ufundowane i nieufundowane

W sensie potocznym zbiór jest pewną kolekcją różnych „przedmiotów", które traktujemy jako całość (jedność). Dla naszych rozważań nie ma znaczenia, czy są to przedmioty myśli, czy jakiekolwiek inne przedmioty (problem miejsca zbiorów w strukturze ontycznej świata mógłby być tematem innego opracowania). Podkreślić natomiast trzeba, że teoria mnogości rozważa zbiory w sensie dystrybutywnym, a podstawową relacją, konstytuującą zbiór dystrybutywny, jest relacja Î należenia.

Najczęściej przyjmowana wersja teorii mnogości – Zermelo-Fraenkla z aksjomatem wyboru (ZFC) – dopuszcza istnienie tylko takich zbiorów, które są zgodne z intuicją. W teorii ZFC każdy zbiór (oprócz zbioru pustego) posiada elementy będące zbiorami, przy czym w procesie konstruowania element zbioru jest zawsze pierwotny w stosunku do tego zbioru. Znaczy to, że dopiero *dysponując* pewnymi elementami możemy z tychże elementów utworzyć zbiór. Ponadto w ZFC istnieją elementy ostateczne: podczas gdy w teorii Zermelo (Z) elementem ostatecznym mógł być zbiór pusty oraz tzw. urelementy (atomy) – czyli obiekty niebędące zbiorami, to w teorii ZFC rolę elementu ostatecznego pełni jedynie zbiór pusty. Elementy ostateczne posiada każdy zbiór (oprócz zbioru pustego, który nie posiada żadnych elementów). Są one

[4] E. Zermelo, *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, „Fundamenta mathematicae" 16 (1930) s. 31.

[5] Por. J. Barwise, L. Moss, *Hypersets*, „Mathematical Intelligencer" 13 (1991) s. 32.

swoistym „fundamentem", stąd mówimy, że wszystkie zbiory w teorii ZFC są ufundowane. Analogicznie – zbiory nieufundowane byłyby to takie zbiory, które nie posiadają ostatecznych elementów, czyli podstawowego „budulca". W tym wypadku ciąg typu

$$\ldots \in A_3 \in A_2 \in A_1 \in A$$

szedłby w nieskończoność. Zbiory nieufundowane nazywamy inaczej hiperzbiorami.

2. Ogólna charakterystyka hiperzbiorów

Aksjomat regularności głosi, że w systemie ZFC nie istnieją zbiory nieufundowane. By lepiej zrozumieć sens tej wypowiedzi, trzeba najpierw odpowiedzieć na pytanie, jaki mógłby być powód tego, że dany zbiór jest nieufundowany. Pierwszy mechanizm, który prowadzi do powstania takiego zbioru, to znane już od dawna zjawisko samozwrotności. Samozwrotność jest odpowiedzialna za powstawanie teoriomnogościowych antynomii, odkrytych już w końcu XIX w. Do samozwrotności dochodzi wtedy, gdy określamy zbiór, którego elementem jest on sam:

$$A = \{A\}$$

Choć jest to zbiór, posiadający dokładnie jeden element, ma on strukturę nieufundowaną:

$$\ldots \in A \in A \in A \in \ldots$$

W tym przypadku do powstania hiperzbioru prowadzi „quasi-rekurencja", a próba określenia zbioru A wymusza nieskończony ciąg operacji. Widać wyraźnie, że zbiór A jest pierwotny w stosunku do swojego elementu:

$$A = \ldots\{\{\{\ldots\}\}\}\ldots$$

Kiedy Zermelo dołącza aksjomat ufundowania do swego systemu, twierdzi, że chce przez to wykluczyć wszystkie zbiory cyrkularne: w szczególności zbiory będące swoimi własnymi elementami, a w ogólności wszystkie zbiory pozbawione korzeni (urelementów)[6]. Wydaje się zatem, że zbiory typu $A = \{A\}$ są szczególnym przypadkiem zbiorów pozbawionych korzeni. Czy zatem mógłby być jeszcze inny powód nieufundowania, niż bycie swoim własnym elementem? Wydaje się, że tak. Wystarczy, nie zastanawiając się nad jakością elementów, tak zdefiniować zbiór wyjściowy, by nie posiadał on elementu najmniejszego względem relacji należenia. Nie musi to być działanie „automatyczne", jak było w przypadku samozwrotności. W tym miejscu warto się posłużyć metaforą. Otóż, w naukach empirycznych mamy do czynienia z odkrywaniem coraz do nowych, bardziej „podstawowych" cząstek elementarnych. Jeszcze do niedawna wierzono, że najmniejszą niepodzielną cząstką świata jest atom. Ten pogląd obowiązywał tak długo, jak długo nie odkryto, że w samym atomie można znaleźć zróżnicowanie na jądro i elektrony. Nie upłynęło wiele czasu, a okazało się, że także jądro atomu to nie pojedyncza cząstka, ale proton i neutron. Do tego dochodzą fotony, kwarki itd. Wraz z rozwojem nauki „wchodzi się" coraz dalej w głąb materii, odkrywając istnienie nowych cząstek, przy czym każda cząstka różni się od pozostałych (dziś znamy ponad dwieście cząstek elementarnych). Można zadać sobie pytanie: czy ten proces dobiegnie kiedyś końca? Czy znajdziemy najmniejszą cząstkę?

Szukanie najmniejszej cząstki elementarnej kojarzy się raczej z mereologią i z relacją $\subset$ inkluzji. Wydaje się jednak, że ten przykład dość dobrze oddaje ideę hiperzbiorów nie-samozwrotnych. Schematycznie taki rodzaj zbioru można zapisać w postaci łańcucha:

$$\ldots \in A_3 \in A_2 \in A_1 \in A$$

gdzie dla każdego *m* i *n*: jeżeli $m \neq n$, to $A_m \neq A_n$.

Podsumowując można stwierdzić, że istnieją dwa rodzaje zbiorów nieufundowanych: (1) te, które są swoimi własnymi elementami oraz (2) te, których elementami są kolejne zbiory, których elementami są kolejne zbiory i tak w nieskończoność (przy czym w tym łańcuchu zbiorów żaden zbiór nie występuje więcej, niż jeden raz). Wydaje się, że aksjomat regularności, którego zadaniem ma być wygenerowanie uniwersum zbiorów o ufundowanej strukturze, powinien być tak skonstruowany, aby obydwa powyższe przypadki uwzględniał.

[6] Por. E. Zermelo, *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, s. 31.

3. Różne postacie aksjomatu regularności

Istnieje wiele różnych wersji aksjomatu regularności. Zostaną one przedstawione i omówione poniżej. Dla większej przejrzystości każdą z tych wersji oznaczymy skrótem FA (z ang. *foundation axiom*) z kolejnymi cyframi.

FA1 Istnieją tylko te zbiory, które da się wyprowadzić z aksjomatów teorii mnogości.

Nie jest to *stricte* aksjomat regularności, lecz aksjomat ograniczenia, sformułowany w roku 1922 przez Fraenkla[7]. Został on jednak oznaczony jako FA1 ze względu na to, że wyraża konstruktywistyczną myśl, zgodnie z którą przedmiotami matematyki mogą być tylko te obiekty, które da się w danej teorii skonstruować. FA1 jest zapowiedzią kolejnych wersji FA (w szczególności FA5).

FA2 Każdy (malejący) łańcuch elementów, w którym dany wyraz jest elementem wyrazu poprzedzającego, kończy się urelementem o skończonym indeksie. Albo, co sprowadza się do tego samego: każda dziedzina częściowa T zawiera co najmniej jeden element t_0, który nie posiada żadnego elementu t w T.

Powyższa formuła pojawia się pod nazwą *Axiom der Fundierung* w słynnej pracy Zermelo[8] z 1930 r. Jak wspomnieliśmy, matematyk formułuje aksjomat ufundowania po to, by wykluczyć zbiory cyrkularne, tzn. nieposiadające ostatecznych elementów. Zermelo jest teoriomnogościowym „atomistą”. Wyznaje on pogląd, że zawsze muszą istnieć ostateczne elementy, z których „zbudowane są” obiekty teorii mnogości. Takimi elementami mogą być zarówno indywidua (urelementy), jak i zbiór pusty (który pełni tę samą funkcję, co indywiduum, ponieważ jest obiektem, który nie posiada żadnego elementu).

FA2 z jednej strony wyklucza nieskończoną strukturę genetyczną zbiorów, a z drugiej strony zapobiega sytuacji, w której $A \in A$, ponieważ gdyby tak było, wówczas łańcuch:

$$\ldots \in A \in A \in A \in \ldots$$

posiadałby nieskończoną liczbę wyrazów.

Podobnie wyklucza się tu możliwość, by jednocześnie $A \in B$ i $B \in A$, ponieważ wówczas także otrzymalibyśmy nieskończony łańcuch typu:

[7] Zob. A. Fraenkel, *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*, „Mathematische Annalen“ 86 (1922) s. 234.

[8] E. Zermelo, *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, s. 31.

$$\ldots A \in B \in A \in B \in \ldots$$

Ta wersja aksjomatu regularności implikuje kolejną jego postać:
FA3 Każdy niepusty zbiór ma element Î-minimalny.

Obiekt X jest elementem minimalnym w zbiorze uporządkowanym przez daną relację R wtedy, gdy nie istnieje obiekt od niego R-mniejszy. Wyraźnie widać, że elementem minimalnym zbioru uporządkowanego przez relację Î należenia jest taki element X, który nie posiada żadnego elementu, czyli X jest ostatnim wyrazem łańcucha, o którym mowa w FA2. Zauważmy, że FA3 nie wymaga, by urelement był elementem najmniejszym[9]. Elementów minimalnych (urelementów) może zatem być wiele.

FA3 niechybnie prowadzi do równoważnego sformułowania obecnego w literaturze:
FA4 Nie istnieje zbiór X taki, że dla pewnego ciągu zbiorów zachodzi następująca własność: $\ldots \in X_n \in \ldots \in X_1 \in X_0 \in X$.

W r. 1930 Zermelo przedstawia projekt tzw. hierarchii kumulatywnej, dzięki której określa uniwersum zbiorów rozważanych w jego teorii. Nazywa on „podstawową sekwencją" (*Grundfolge*) dobrze uporządkowany zbiór, w którym każdy element (z wyjątkiem elementu pierwszego, który musi być urelementem) jest identyczny ze zbiorem wszystkich poprzedzających go elementów[10]:

$$g_0 = u, \quad g_1 = \{u\}, \quad g_2 = \{u, \{u\}\}, \quad g_3 = \{u, \{u\}, \{u, \{u\}\}\}$$

i tak dalej zgodnie z zasadą:

$$g_{\alpha+1} = g_\alpha \cup \{g_\alpha\}$$

oraz:

$$g_\alpha = \sum_{\beta<\alpha} g_\beta$$

dla liczby granicznej α .

Innymi słowy, podstawowa sekwencja to zbiór, który zgodnie z FA3 jest dobrze uporządkowany przez relację Î bycia elementem.

[9] Element najmniejszy to taki element zbioru uporządkowanego przez daną relację R, że wszystkie inne elementy są od niego R-większe.

[10] Zob. E. Zermelo, *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, s. 31-32.

W tym miejscu należy poczynić ważną uwagę:
Zauważmy, że dla każdego *m* i *n*:
Jeżeli $m < n$, to $g_m \in g_n$
co jest istotne dla dowodu FA6a poniżej.
Posługując się pojęciem hierarchii kumulatywnej, można sformułować kolejną wersję FA:

FA5 Każdy zbiór jest elementem hierarchii kumulatywnej (w rozumieniu Zermelo).

Wyraźnie widać, że iteracyjny mechanizm, opisany powyżej, zapobiega temu, by w uniwersum pojawił się zbiór, który nie jest ufundowany. FA5 nawiązuje w pewien sposób do FA1.

Adaptując FA5 do flagowej dziś teorii ZFC powiemy, że każdy zbiór musi być elementem hierarchii kumulatywnej:

$$V = \bigcup_a V\alpha$$

gdzie: $V_0 = \varnothing$, $V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$, $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$ dla liczby granicznej α.

Mniej więcej w tym samym czasie co Zermelo, swoją własną walkę ze zbiorami nieufundowanymi podejmuje von Neumann. Jak wspomnieliśmy wyżej, w artykule z roku 1925 próbuje on pozbyć się z uniwersum zbiorów (jak je nazywa) „zbytecznych" i formułuje aksjomat, który rzeczywiście takie zbiory wyklucza, jednak nie wszystkie[11]. Dopiero w następnej publikacji – z r. 1928 – von Neumann podaje ostateczną (przyjmowaną dziś przez uczonych najchętniej) wersję FA, przepracowaną później i podaną we współczesnej notacji przez Adama Riegera:

FA6a $\forall X\left(X \neq \varnothing \rightarrow \exists A\left(A \in X \wedge A \cap X = \varnothing\right)\right)$ przy założeniu, że elementami *X* są tylko zbiory[12]

FA6a można rozwinąć, korzystając z definicji iloczynu zbiorów:

FA6b $\forall X\left(X \neq \varnothing \rightarrow \exists A\left(A \in X \wedge \neg\exists Z\left(Z \in A \wedge Z \in X\right)\right)\right)$ przy założeniu, że elementami *X* są tylko zbiory

Główna myśl wyłaniająca się z powyższej formuły jest taka, że elementem danego zbioru wyjściowego *X* nie może być zbiór, który zawiera element,

[11] Zob. J. von Neumann, *An axiomatization of set theory*, [w:] J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, Cambridge 1967, s. 412.
[12] Zob. Tenże, *Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre*, „Mathematische Annalen" 99 (1928) s. 373-391.

będący jednocześnie elementem zbioru wyjściowego *X* (w szczególności elementem zbioru *X* nie może być sam zbiór *X*).

W literaturze spotykamy jeszcze jedną wersję FA – równoważną z FA6b:

FA7 $$\forall X \exists A \big(X = \varnothing \vee \big(A \in X \wedge \forall Z \left(Z \in X \to \neg Z \in A \right) \big) \big)$$

Barwise i Etchemendy podają dość przejrzysty dowód na to, że na gruncie kumulatywnej teorii mnogości każdy niepusty zbiór posiada puste przecięcie ze zbiorem, będącym jego elementem[13].

Rozumowanie przebiega następująco:

Niech *a* będzie dowolnym zbiorem, którego elementami są tylko zbiory. Pokażemy, że każdy z elementów zbioru *a* posiada puste przecięcie z *a*.

Pośród elementów zbioru *a* wybieramy taki zbiór $b \in a$, który występuje „najwcześniej" w procesie kumulatywnym, tzn. dla każdego innego zbioru $c \in a$ zbiór *b* jest skonstruowany co najmniej tak wcześnie, jak *c*.

Twierdzenie: $b \cap a = \varnothing$

Dowód niewprost:
Załóżmy, że $b \cap a \neq \varnothing$ i niech $c \in b \cap a$. Z definicji przecięcia zbiorów wiemy, że jeśli $c \in b \cap a$, to: $c \in b \wedge c \in a$. Skoro $c \in b$, to zbiór *c* musiał *pojawić się* wcześniej w procesie konstrukcji, niż zbiór *b*. Z drugiej strony zbiór $c \in a$ oraz zbiór *b* zostały tak dobrane, żeby nie było takiego zbioru $c \in a$, który jest skonstruowany wcześniej, niż *b*. Ta sprzeczność kończy dowód.

Wniosek: $b \cap a = \varnothing$

4. Zastrzeżenia wobec aksjomatu regularności

Co tak naprawdę ma na myśli logik, kiedy mówi: „aksjomat ufundowania/regularności"? Jak się okaże w dalszej części tego opracowania, formuły FA1 – FA7 nie są równoważne. Aksjomat ufundowania (w jakiejkolwiek wersji) może budzić pewien niepokój. Po pierwsze, nie do końca jasna jest jego rola w kwestii tzw. „zasady błędnego koła"; po drugie, FA nie jest pierwszym remedium na antynomię Russella; po trzecie, w pewnych przypadkach FA6 wydaje się ewidentnie nieskuteczny. Poniżej wszystkie te wątpliwości zostaną uzasadnione.

[13] Zob. J. Barwise, J. Etchemendy, *Language, Proof and Logic,* CSLI, Stanford 2008, s. 439.

4.1. Zasada błędnego koła

Russell, zainspirowany osiągnięciami Poincaré, był przekonany, że przyczyną powstawania antynomii jest dopuszczenie cyrkularnego sposobu myślenia. Jak zauważa Adam Rieger, z pism Russella można wydobyć tzw. zasadę błędnego koła VCP (*Vicious Circle Principle*), która przybiera dwie formy:

VCP I Żadna totalność nie może zawierać elementów zdefiniowanych w swoich kategoriach.

VCP II Cokolwiek obejmuje *wszystko* z danej kolekcji, samo nie może być elementem tejże kolekcji.

VCP I wydaje się najbliższa konstruktywistycznemu duchowi przyświecającemu Poincaré, gdyż wyklucza ona definicje niepredykatywne, czyli definicje x obejmujące kolekcję, której x jest elementem. VCP II wyklucza natomiast zbiory, które są swoimi własnymi elementami[14].

Rieger udowadnia, że teoria ZFC respektuje zasadę VCP II (gdyż gwarantuje jej to aksjomat ufundowania), ale łamie zasadę VCP I. Autor zwraca uwagę na fakt, że aksjomat wyróżniania, obecny na gruncie ZFC, pozwala dla każdego zbioru A określić nowy zbiór B poprzez *zebranie* tylko tych elementów zbioru A, które spełniają pewną formułę $\varphi(x)$. Okazuje się jednak, że nie istnieje żadne ograniczenie co do kwantyfikatorów, które mogą wystąpić jako formuła $\varphi(x)$: mogą one obejmować zasięgiem całe uniwersum. Zatem ZF w swobodny sposób dopuszcza definicje niepredykatywne[15].

Większość aksjomatów podanych przez Zermelo zrodziło się z potrzeby obrony jego dowodu na to, że każdy zbiór może być dobrze uporządkowany. Nie dotyczy to jednak aksjomatu ufundowania. Aby znaleźć sposób na usprawiedliwienie aksjomatyki Zermelo, trzeba odwołać się do pewnego myślowego przeskoku. Intuicyjna koncepcja zbioru – koncepcja iteracyjna, prowadzi nas do intuicyjnego rozumienia modelu – czyli do hierarchii kumulatywnej. Aksjomaty są słuszne przez to, że są one prawdziwe w tym modelu. W przypadku hierarchii kumulatywnej elementami zbioru, „znajdującego się" na danym poziomie, mogą być tylko takie obiekty, które „powstały" na poziomie niższym (czyli jakby „wcześniej"). Stąd właśnie, jak stwierdza także Shaughan Lavine, aksjomat ufundowania w koncepcji iteracyjnej zajmuje centralne miejsce: „z jednej strony aksjomat gwarantuje, że wszystkie zbiory

[14] Zob. A. Rieger, *Paradox, ZF, and the Axiom of Foundation*, [w:] D. DeVidi, M. Hallett, P. Clark, *Logic, Mathematics, Philosophy: Vintage Enthusiasms. Essays in Honour of John L. Bell*, Springer, New York 2011, s. 179.

[15] Zob. tamże, s. 180.

mają charakter iteracyjny, z drugiej strony iteracyjna koncepcja czyni aksjomat oczywistym”[16].

Rieger słusznie zauważa, że mówiąc o hierarchii autorzy używają zwykle określeń czasowych: „zanim”, „jeszcze”, „dopóki”, „teraz”, „uprzednio”. Oczywiście, mamy tu do czynienia tylko z metaforą. Wcale nie chodzi o to, że jest jakiś moment t_0, w którym istnieje jedynie zbiór pusty, a potem przychodzi kolejny moment czasowy, w którym zostaje uformowany singleton ze zbiorem pustym itd. Gdyby tak było, potrzebny by był jakiś „sprawca” (*agent*), konstruujący przynajmniej w swoim umyśle kolejne piętra teoriomnogościowego uniwersum. Rieger twierdzi, że gdyby ów sprawca wykonywał swoją „pracę” w zwykłym czasie, wówczas nie mógłby nigdy stworzyć całej hierarchii (przynajmniej jeżeli czas składa się z *continuum* momentów). Sprawca musiałby poświęcić *super-czas* o klasie momentów izomorficznej do zbioru liczb porządkowych. Z drugiej strony, jednak, sprawca nie mógłby być zbyt mocny – jeśli zdołałby tam i z powrotem „poruszać się” w czasie, wówczas byłoby dość tajemniczym, dlaczego zbiory muszą być konstruowane w jakimkolwiek porządku. Jak widać, idea „super-sprawcy” nie jest pozbawiona pewnych komplikacji. Kwestia uprzedniości pewnych zbiorów dotyczy jednak raczej porządku logicznego, niż czasowego. Aksjomat ufundowania wyraża myśl, że na gruncie teorii ZFC zbiór „późniejszy” nigdy nie będzie elementem zbioru „wcześniejszego”. Ale czy sam ten aksjomat jest przyczyną takiego stanu rzeczy?

4.2. Aksjomat regularności a antynomia Russella

Przyjmuje się, że głównym *winowajcą* antynomii Russella jest tzw. nieograniczony aksjomat komprehensji (zwany inaczej pewnikiem abstrakcji):

$$\exists Z \forall x \left(x \in Z \equiv \varphi(x) \right)$$

Aksjomat komprehensji głosi, że istnieje taki zbiór, do którego należą wszystkie obiekty spełniające dowolną daną formułę φ. Na pierwszy rzut oka wszystko wydaje się w porządku. Problem pojawia się jednak wtedy, gdy za formułę φ (która jest dowolna) podstawimy np. wyrażenie $x \notin x$. Wówczas otrzymamy:

[16] S. Lavine, *Understanding the Infinite*, Harvard University Press, Cambridge 1994, s. 144: “The iterative conception gives the Axiom of Foundation center stage: as Zermelo showed, that axiom ensures precisely that each set is a «set of» sets that occurred at previous «layers» or iterations of the «set of» operation. The axiom guarantees that all sets are iterative sets, and the iterative conception makes the axiom obvious”.

$$x \in Z \equiv x \notin x$$

Dalej, podstawiając za zmienną *x* stałą *Z*, dojdziemy do wyrażenia:

$$Z \in Z \equiv Z \notin Z$$

co prowadzi do sprzeczności. Taki jest mechanizm powstawania antynomii Russella (a także innych antynomii naiwnej teorii mnogości). Dziś, z punktu widzenia teorii ZFC, powiedzielibyśmy, że antynomia Russella powstaje w momencie, gdy w schemacie pewnika abstrakcji za zmienną *x* podstawimy stałą oznaczającą zbiór, który „powstał" na tym samym „etapie" procesu iteracyjnego, co zbiór *Z* (lub na „etapie" późniejszym). Antynomie są „chorobami wieku dziecięcego" teorii mnogości – w systemach późniejszych znaleziono kilka sposobów, by uporać się z tym problemem. W teorii ZFC ograniczono aksjomat komprehensji, formułując aksjomat wyróżniania:

$$\forall A \exists Z \forall x \big(x \in Z \equiv x \in A \wedge \varphi(x)\big)$$

Zgodnie z zastrzeżeniami, wspomnianymi powyżej, trzeba koniecznie zaznaczyć, że wyrażenie $\varphi(x)$ musi być tak dobrane, aby *Z* nie występowało w nim jako zmienna wolna. Gdyby tak bowiem było, nadal nie uniknęlibyśmy sprzeczności[17].

Jaki jest sens zastępowania pewnika abstrakcji aksjomatem wyróżniania? Otóż, ograniczenie aksjomatu komprehensji prowadzi do sytuacji, w której zbiór *Z* zawiera się w zbiorze *A*, lecz nie należy do zbioru *A*. W przypadku aksjomatu wyróżniania zbiór *Z* tworzymy z obiektów, które są już elementami jakiejś kolekcji *A*, to znaczy *powstały* wcześniej, niż *A*. „Powstały" one także wcześniej, niż *Z*, a zatem nie ma możliwości, by *wewnątrz* zbioru *A*, pośród elementów, z których ma zostać utworzony zbiór *Z*, znajdował się sam zbiór *Z*. Jak widać, taki zabieg jest wystarczający, by uniknąć sprzeczności.

Oczywiście, zbiór *A* także nie bierze się znikąd – on też musiał być „utworzony" za pomocą mechanizmu wyróżniania, czyli musiał być wcześniej elementem jakiejś kolekcji (podobnie jak i ta kolekcja) i tak w nieskończoność. Regresu w nieskończoność moglibyśmy uniknąć przyjmując istnienie klasy wszystkich zbiorów[18], jednak z różnych względów jest to rozwiązanie tylko połowiczne.

---

[17] Takie sformułowanie aksjomatu wyróżniania pochodzi od T. Skolema.

[18] Każda klasa jest zbiorem, ale nie każdy zbiór jest klasą. Klasa to taki zbiór, który nie jest elementem żadnej innej kolekcji.

Okazuje się więc, że to nie aksjomat ufundowania zapobiega możliwości sformułowania antynomii Russella, lecz idea hierarchii kumulatywnej wespół z pewnikiem abstrakcji. Aksjomat regularności jest jedynie formułą prawdziwą w teorii ZFC, choć niekoniecznie gwarantującą ufundowany charakter tejże teorii. Niżej pokażemy, że w pewnych sytuacjach FA6 (który jest dziś najchętniej przyjmowaną wersją FA) bywa spełniony nawet wtedy, gdy poruszamy się na gruncie teorii zbiorów nieufundowanych.

4.3. Nieskuteczność FA6

Wcześniej stwierdziliśmy, że w systemie ZFC aksjomat regularności FA6a jest zawsze spełniony (dowód na to został podany w punkcie 4 tej pracy). Sprawdzimy teraz, co się stanie, gdy do teorii dopuścimy hiperzbiory. Czy pewnik zachowa swój apodyktyczny charakter? Czy rzeczywiście aksjomat ufundowania „zabezpiecza" teorię przed zbiorami nieregularnymi?

Niech $X = \{X\}$.

FA6a głosi:

$$\forall X \left(X \neq \varnothing \rightarrow \exists A \left(A \in X \wedge A \cap X = \varnothing \right) \right)$$

Jak widać, zbiór *X* jest niepusty, a jedynym jego elementem jest on sam, a więc sprawdzając warunek $A \cap X = \varnothing$, za zmienną *A* musimy podstawić stałą oznaczającą zbiór *X*. Wówczas otrzymamy:

$$X \cap X = X \neq \varnothing$$

Zbiór *X* nie spełnia warunku postulowanego przez FA6a, co pozwala nam wysnuć wniosek, że nie należy on do uniwersum zbiorów teorii ZFC.

Szczególnym przypadkiem zbioru *A* (patrz FA6a) jest zbiór $A = \varnothing$. Niech zatem zbiór $X = \{\varnothing, X\}$. To także jest zbiór nieufundowany, jednak $A \cap X = \varnothing \cap X = \varnothing$. Jeżeli więc chcielibyśmy traktować aksjomat ufundowania jako gwarancję regularności zbiorów, to w tym wypadku okazuje się on być narzędziem mało skutecznym: zbiór *X* spełnia aksjomat regularności, choć jest nieufundowany.

Rozważmy teraz inny przykład zbioru nieufundowanego.

Niech $X = \{A, X\}$ oraz $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Jak widać, zbiór *X* jest niepusty oraz $A \in X$. Sprawdźmy znów warunek $A \cap X = \varnothing$:

$$A \cap X = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cap \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}, X\} = \varnothing$$

Aksjomat regularności, zatem, znów pozostaje spełniony dla zbioru X, mimo że zbiór X nie jest ufundowany.

Z powyższych rozważań można wysnuć ważny wniosek: przyjęcie samego aksjomatu ufundowania (w wersji FA6) nie jest gwarancją tego, że w teorii będą występować tylko zbiory ufundowane, bowiem istnieją takie zbiory nieufundowane, które również spełniają ten aksjomat.

5. Nowe sformułowanie FA

Przypomnijmy, że FA nie należy do pierwotnej aksjomatyki Zermelo (z 1908 r.) – został on dołączony do systemu dopiero w r. 1928, w miejsce usuniętego aksjomatu nieskończoności. Co prawda, FA jest wyrażeniem opisującym pewną własność zbiorów ufundowanych, ale to wcale nie on *sprawia*, że do uniwersum przedmiotów teorii ZFC należą wyłącznie zbiory ufundowane. Gdy chodzi o FA6a, można wypowiedzieć następujący wniosek:

Jeżeli dany zbiór X *jest ufundowany*, *to dla zbioru* X *formuła FA6a jest spełniona*.

Zauważmy, że implikacja odwrotna nie jest prawdziwa. Zgodnie z prawami logiki, wiemy więc, że:

(1) Ponieważ w ZFC występują wyłącznie zbory ufundowane, FA6a jest w niej zawsze spełniony. Nie jest możliwe, by dla jakiegoś zbioru z hierarchii kumulatywnej FA6a generował zdanie fałszywe.

(2) Jeśli dana teoria dopuszczałaby hiperzbiory, wówczas dla niektórych zbiorów (hiperzbiorów) formuła FA6a byłaby spełniona, a dla innych – nie. W takiej sytuacji FA6a (i wersje równoważne) przestaje być formułą niezawodną.

(3) Jeśli dla danego zbioru X formuła FA6a jest spełniona, wówczas zbiór X może być zarówno ufundowany, jak i nieufundowany – to chyba najważniejszy wniosek tej pracy.

To, że dany zbiór nie spełnia aksjomatu ufundowania w wersji FA6, jest sygnałem, że zbiór ten jest nieufundowany, jednak fakt, że dany zbiór spełnia ten aksjomat, wcale jeszcze nie musi oznaczać, że jest on ufundowany. Aksjomatu ufundowania w wersji FA6 nie wolno zatem traktować jako jedynego kryterium regularności zbiorów. Warto w końcu zauważyć, że pozostałe wersje rozważanego pewnika (w szczególności FA2, FA3 oraz FA5) w kontekście naszych rozważań wyrażają nieco inną ideę, a mianowicie nawiązują do jakiegoś urelementu, czyli elementu „ostatecznego" względem relacji należenia. Skoro więc w teorii ZFC każdy zbiór jest dobrze uporządkowany przez relację $\in$ należenia, to aksjomat regularności można by formalnie przedstawić w następujący sposób:

$$\forall A(A = \varnothing \vee \exists X(X \in A \wedge \forall Y\left(Y \in A \to Y \geq_{\in} X\right)$$

Wydaje się, że takie właśnie sformułowanie FA (zob. FA3) wydaje się najbliższe intuicji, która przyświecała Zermelo, układającemu w r. 1928 swą listę aksjomatów.

Warto jednak zauważyć, że aksjomat ufundowania w wersji FA6 może być przydatny choćby w dowodzie twierdzenia, że na gruncie teorii ZF:

$$\forall X\left(X \notin X\right)$$

Twierdzenie: $X \notin X$
Dowód niewprost:
Załóżmy, że dla danego niepustego zbioru *X*: $X \in X$. Aksjomat regularności głosi, że:

$$\forall X\left(X \neq \varnothing \to \exists A\left(A \in X \wedge A \cap X = \varnothing\right)\right)$$

Korzystając z powyższego, $X \neq \varnothing$ i $X \in X$, a zatem $X \cap X = \varnothing$. Z drugiej jednak strony wiemy, że $X \cap X = X \neq \varnothing$. Otrzymujemy sprzeczność, która kończy dowód.
Wniosek: $X \notin X$.

FA jest także użyteczny przy dowodzeniu, że dla dowolnych zbiorów *X*, *Y* i *Z* zachodzą następujące implikacje[19]:

$$X \in Y \to Y \notin X \text{ oraz } X \in Y \in Z \to Z \notin X$$

Zakończenie

Podsumowując, teoria ZFC rozważa tylko zbiory regularne nie dzięki aksjomatowi ufundowania, lecz dzięki pewnikowi wyróżniania. Z aksjomatu ufundowania wolno korzystać jedynie na gruncie teorii zbiorów regularnych. Aksjomatu ufundowania w wersji FA6 oraz w wersjach równoważnych (np. FA7) nie

[19] Zob. A. Błaszczyk, S. Turek, *Teoria mnogości*, Warszawa 2007, s. 103-104.

należy traktować jako „miernika" regularności zbiorów – nie oddają one bowiem w pełni ducha, który przeświecał idei ufundowania.

Streszczenie

Artykuł prezentuje różne postacie aksjomatu regularności (FA) oraz jego konsekwencje w systemie Zermelo-Fraenkla (ZFC). W pracy zasygnalizowane są pewne zastrzeżenia wobec FA oraz fakt, że nie jest on nieodzowny. Aksjomat ufundowania zachowuje swój apodyktyczny charakter tylko na gruncie teorii zbiorów regularnych – w innych przypadkach może nie być spełniony przez wszystkie zbiory. Jedna z najbardziej popularnych wersji FA nie może być traktowana jako *miernik* regularności zbiorów – nie oddaje ona bowiem w pełni ducha idei ufundowania.

Słowa kluczowe: aksjomat regularności, aksjomat ufundowania, hiperzbiory, hierarchia kumulatywna, błędne koło, cyrkularność, samozwrotność

Summary

The axiom of regularity and regularity of set

The paper presents different formulations of regularity axiom (FA) and its consequences in Zermelo-Fraenkel's system (ZFC). Some objections to the axiom are emphasized and its indispensability is examined. It is also proved that FA in one of its formulations cannot be treated like a measure of sets regularity, because it doesn't meet the requirements that it was intended to meet.

Keywords: regularity axiom, foundation axiom, hypersets, cumulative hierarchy, vicious circle, circularity, self-reference

Bibliografia

Barwise J., Etchemendy J., *Language*, *Proof and Logic*, CSLI, Stanford 2008.
Barwise J., Moss L., *Hypersets*, „Mathematical Intelligencer" 13 (1991) s. 31-41.
Cohen P. J., *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Dover Publications, New York 2008.
Fraenkel A., *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*, „Mathematische Annalen" 86 (1922) s. 230-237.
Lavine S., *Understanding the Infinite*, Harvard University Press, Cambridge 1994.
von Neumann J., *An axiomatization of set theory*, [w:] van Heijenoort J., *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, Cambridge 1967, s. 393-413.

von Neumann J., *Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre*, „Mathematische Annalen" 99 (1928) s. 373-391.

Rieger A., *Paradox*, *ZF*, *and the Axiom of Foundation*, [w:] de Vidi D., Hallett M., Clark P., *Logic*, *Mathematics*, *Philosophy*: *Vintage Enthusiasms*. *Essays in Honour of John L*. *Bell*, Springer, New York 2011, s. 171-187.

Zermelo E., *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, „Fundamenta mathematicae" 16 (1930) s. 29-47.