Studia Paradyskie, t. 27, 2017, s. 187–206

Krzysztof Jaworski[1]
Szczecin

Antynomia kłamcy a teoria hiperzbiorów

Wstęp

Hiperzbiory, zwane inaczej zbiorami nieufundowanymi lub nieregularnymi, są obiektami wymykającymi się naszym potocznym intuicjom. Zwykle zbiór porównujemy do worka, w którym «coś» się znajduje, lub do pudełka, w którym «coś» jest zamknięte (worek czy pudełko mogą być też puste). Trudno jednak wyobrazić sobie pudełko, które znajduje się w sobie samym, to znaczy pudełko będące swoim własnym elementem – takie właśnie pudełko musiałoby wyobrażać pewien typ hiperzbioru. Metafora pudełka nie oddaje w stu procentach idei zbioru nieufundowanego. Cechą charakterystyczną tego typu kolekcji jest regres nieskończony relacji $\ni$. Regres ten sprawia, że zbiór nieufundowany podobny jest do matrioszki, którą da się rozkładać bez końca.

Różnicę między zbiorami regularnymi i nieregularnymi dostrzeżono już u zarania teorii mnogości: jako pierwszy wyraźnie wspomniał o tym Mirimanoff[2]. W tamtym czasie jednak zbiory nieufundowane spotkały się ze sprzeciwem większości uczonych – określano je nawet mianem „zbytecznych". Z tego powodu sformułowano wkrótce aksjomat ufundowania, który miał „zabezpieczyć" teorię przed hiperzbiorami[3]. Gdy aksjomat ufundowania został dołączony do systemu Ernsta Zermeli (ZFC), „pudełkowa" (ufundowana) teoria mnogości zakrólowała w matematyce na dobre[4].

Jednym z powodów niechęci do hiperzbiorów był brak pomysłu na ich zastosowanie. Poza tym, skoro w teorii ZFC udało się zbudować model aryt-

---

[1] Krzysztof Jaworski – ks. dr, adiunkt na Wydziale Teologicznym Uniwersytetu Szczecińskiego, e-mail: krzysztof.jaworski@usz.edu.pl.

[2] Zob. D. Mirimanoff, *Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la thèorie des ensembles*, „L'enseignement mathèmatique" 19 (1917), s. 37-52.

[3] Zob. J. von Neumann, *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*, „Journal für reine und angewandte Mathematik" 154 (1925), s. 219-240.

[4] Aksjomat ufundowania gwarantuje, że w uniwersum nie znajdą się nigdy zbiory, których regres relacji $\ni$ biegnie w nieskończoność.

metyki liczb naturalnych – co było *de facto* jednym z celów powstania teorii mnogości – nie widziano już potrzeby dalszego rozbudowywania tej teorii o zbiory nieintuicyjne. Nie znaczy to jednak, że zbiory nieufundowane odeszły na zawsze w zapomnienie. Na przestrzeni lat sformułowano przynajmniej kilka niestandardowych systemów, których uniwersum było wzbogacone o kolekcje nieintuicyjne – należy tu wymienić takich matematyków jak m.in. Finsler, Boffa, Scott, Gordeev, Forti i Honsell, czy też Aczel. Teoria Aczela, zwana teorią ZFA – najbardziej dojrzała i „teoretycznie schludna" – jest dziś uważana przez wielu za standardową teorię hiperzbiorów.

Celem tej pracy jest prezentacja jednego z filozoficznych zastosowań teorii Aczela. Na bazie tej teorii można budować teoriomnogościowe modele sądów cyrkularnych. Jest to pomysł przedstawiony przez Barwise'a i Etchemendy'ego (zwanych dalej Autorami) w monografii pt. *The Liar*. *An Essay on Truth and Circularity*[5]. Autorzy przy pomocy teoriomnogościowych modeli sądów cyrkularnych przeprowadzają analizę tak zwanego *zdania kłamcy* oraz podają nowe rozwiązanie starego problemu Epimenidesa. Rozwiązanie Barwise'a i Etchemendy'ego jest rzadko eksponowane i mało popularne (szczególnie w literaturze polskojęzycznej), mimo że w ciekawy sposób pozwala uporać się z antynomią kłamcy – i to bez konieczności wprowadzania dychotomii język-metajęzyk. Aparatura zbudowana na użytek tego rozwiązania jest jednak na tyle obszerna, że nie da się jej przedstawić w tej pracy w całej okazałości. Ograniczymy się jedynie do syntetycznego sprawozdania głównej myśli.

1. Kłamca

Zaznaczmy na początku, że istnieje wiele różnych wersji antynomii kłamcy – są to m.in.: *zdanie kłamcy*, *warunkowe zdanie kłamcy*, *cykl kłamcy*, *antynomia Löba*, *zagadka Gupty*, czy też *wzmocniony Kłamca*. Mechanizm powstawania każdej z nich jest podobny[6].

Najbardziej znaną wersją omawianego problemu jest tzw. *zdanie kłamcy* (zwane w skrócie po prostu *Kłamcą*), czyli zdanie, które głosi o sobie samym, że nie jest prawdziwe:

To zdanie nie jest prawdziwe.

[5] J. Barwise, J. Etchemendy, *The Liar*. *An Essay on Truth and Circularity*, New York-Oxford 1987.

[6] Pomijamy omówienie różnicy między zdaniem i sądem (*sentence* i *proposition*). Można powiedzieć, że *zdanie kłamcy* wyraża *sąd kłamcy*. Zdanie jest elementem języka, natomiast sąd jest związany z przekonaniem podmiotu poznającego. Dwa różne zdania mogą wyrażać ten sam sąd.

Przyjęcie prawdziwości *zdania kłamcy* prowadzi do stwierdzenia jego fałszywości, natomiast – odwrotnie – założenie fałszywości *zdania kłamcy* skutkuje stwierdzeniem jego prawdziwości. W ten sposób otrzymujemy antynomię.

Przykładem *warunkowego zdania kłamcy* jest następujące wyrażenie:

Marek ma trójkę trefl i to (*całe*) *zdanie jest fałszywe*.

Jeżeli założymy, że Marek nie otrzymał w rozdaniu trójki trefl, wówczas powyższa koniunkcja będzie fałszywa (na mocy najprostszych praw logiki). Warunkiem powstania antynomii jest sytuacja, w której Marek ma trójkę trefl. Wówczas wartość logiczna koniunkcji zależałaby od wartości logicznej drugiego czynnika, a to prowadzi do sprzeczności.

Cyklem Kłamcy jest taki skończony układ zdań, w którym każde zdanie (z wyjątkiem ostatniego) stwierdza o swoim następniku, że jest prawdziwy, natomiast zdanie ostatnie stwierdza o pierwszym, że jest fałszywe:

(a_1) *Zdanie* a_2 *jest prawdziwe*.
(a_2) *Zdanie* a_3 *jest prawdziwe*.
...
(a_n) *Zdanie* b *jest prawdziwe*.
(b) *Zdanie* a_1 *jest fałszywe*.

Mechanizm powstania antynomii jest w tym wypadku oczywisty. Wartość logiczna każdego ze zdań zależy od wartości logicznej wszystkich pozostałych zdań i jest niejako „cyklicznie” dziedziczona przez te zdania.

Antynomia Löba powstaje w następującej wypowiedzi:

Jeżeli to (*całe*) *zdanie jest prawdziwe*, *to Marek ma trójkę trefl*.

W przypadku, gdyby poprzednik tego zdania był prawdziwy, następnik również musiałby być prawdziwy (na mocy zasady *Modus Ponens*). Wówczas dowiedzielibyśmy się po prostu, że Marek ma trójkę trefl. Jednak w przypadku fałszywości poprzednika, mielibyśmy już do czynienia z antynomią: fałszywość poprzednika wskazywałaby wówczas na prawdziwość implikacji (gdyż implikacja o fałszywym poprzedniku jest zawsze prawdziwa) i jednocześnie na jej fałszywość (skoro poprzednik fałszywie stwierdza prawdziwość tej implikacji).

Ciekawym przykładem sprzeczności jest tzw. *zagadka Gupty*. Rozważmy następujący układ wypowiedzi dwojga różnych ludzi:

Pan A:
(a_1) *Marek ma asa trefl.*
(a_2) *Wszystkie sądy wydane przez Pana B są prawdziwe.*
(a_3) *Co najmniej jeden z sądów wydanych przez Pana B jest fałszywy.*

Pan B:
(b_1) *Klara ma asa trefl.*
(b_2) *Co najwyżej jeden z sądów wydanych przez Pana A jest prawdziwy.*

Wydaje się, że analizę tego układu należałoby przeprowadzić w następujących krokach: po pierwsze stwierdzamy, że zdania a_2 i a_3 są sprzeczne, więc co najwyżej jedno z nich może być prawdziwe; po drugie, jeżeli zdanie a_1 byłoby fałszywe, to b_2 musiałoby być prawdziwe; wówczas zdanie a_2 byłoby prawdą, natomiast a_3 fałszem.
Gupta uznał ten przypadek za kontrprzykład jednej z wersji *Kłamcy*, rozważanej przez Kripkego[7]. Kripke wskazał, że rozumowanie, jakie zaprezentowaliśmy wyżej, jest niepoprawne, mimo że na pierwszy rzut oka nie mamy mu nic do zarzucenia[8]. Nie będziemy tu jednak bardziej szczegółowo omawiać tej sprawy, gdyż wykracza ona poza cel przez nas założony.

Wzmocnionym Kłamcą nazywamy następujący układ wypowiedzi dwojga różnych ludzi:

Pan A:
(c_1) *To zdanie nie jest prawdziwe.*

Pan B:
(c_2) *Zdanie c_1 nie jest prawdziwe.*

Zdania c_1 i c_2 wyrażają ten sam sąd. Zdanie c_2 wygląda na niecyrkularne, gdyż nie odnosi się do siebie samego. Ponadto zdanie c_1 z pewnością nie jest prawdziwe, gdyż założenie jego prawdziwości prowadzi do sprzeczności. Mogłoby to więc oznaczać, że zdanie c_2 jest prawdziwe. Z drugiej jednak strony, skoro stwierdzamy, że c_1 nie jest prawdziwe, to czy tym samym nie stwierdzamy właśnie dokładnie tego, co głosi c_1? Zatem c_1 byłoby prawdziwe, co jest niezgodne z tym, co stwierdza c_2. Tak otrzymujemy sprzeczność.
Rozwiązanie antynomii kłamcy, zaproponowane przez Barwise'a i Etchemendy'ego, opiera się na dwóch różnych koncepcjach sądu: koncepcji Russella i koncepcji Austina. Trzeba przy tym od razu zaznaczyć, że mówiąc „koncepcja sądu w sensie Russella" nie mamy na myśli żadnej teorii sformułowanej *expli-*

[7] Zob. A. Gupta, *Thuth and Paradox*, „Journal of Philosophical Logic" 11 (1982), s. 34-35.
[8] Zob. S. Kripke, *Outline of a Theory of Truth*, „Journal of Philosophy" 72 (1975), s. 690-716.

cite przez Russella, ale myślimy raczej o pewnym ujęciu problemu, nawiązującym do jego filozofii. Chodzi więc nie tyle o koncepcję sądu w sensie Russella, co raczej o koncepcję sądu sformułowaną w duchu filozofii Russella.
Ujęcia Russella i Austina różnią się w trzech zasadniczych kwestiach:

- natury sądów,
- mechanizmów, za pomocą których zdania mogą być stosowane do wyrażania sądów,
- natury prawdy.

Koncepcję Russellowską można by scharakteryzować krótko w następujących punktach:

a) zdania (*sentences*) są „wyrazicielami" sądów (*propositions*),
b) sąd jest prawdziwy tylko wówczas, gdy świat (rzeczywistość) jest taki, jak stwierdza ten sąd,
c) każdy sąd posiada określone składniki, odpowiadające temu, co dany sąd stwierdza.

Dzięki temu, że – zgodnie z punktem c) – każdy sąd posiada pewne składniki, sądom w sensie Russella możemy nadać teoriomnogościową postać (o której powiemy w dalszej części pracy). Dla przykładu rozważmy sąd „Klara ma asa kier". Jest to sąd, który mówi o Klarze, o asie kier oraz o relacji posiadania, która zachodzi między Klarą i asem kier. Zatem Klara, as kier i relacja posiadania będą w koncepcji Russellowskiej składnikami sądu „Klara ma asa kier".

2. Język formalny $\mathcal{L}$

Jak powiedzieliśmy, celem Barwise'a i Etchemendy'ego jest prezentacja dwóch modeli sądu: Russellowskiego i Austiniańskiego. Aby ten cel osiągnąć, Autorzy w pierwszej kolejności definiują prosty język formalny $\mathcal{L}$, wyrażający podstawowe cechy języka naturalnego. Następnie podają dwie semantyczne interpretacje języka $\mathcal{L}$ i porównują oba ujęcia. Język $\mathcal{L}$ mówi o grze w karty dwojga ludzi: Klary i Marka.

Alfabet

- symbole stałe: *Klara*, *Marek*, $2\clubsuit$, $3\clubsuit$,..., $K\spadesuit$, $A\spadesuit$
- zaimki (propozycjonalne): this, that_1, that_2 …
- symbol relacji binarnej: *Has*
- symbol relacji binarnej: *Believes*
- symbol relacji jednoelementowej: *True*
- łączniki logiczne: $\wedge$, $\vee$, $\neg$
- wskaźnik zakresu: $\downarrow$

Wyrażenia atomiczne

- $(a\ Has\ c)$, gdzie a jest jednym z imion: *Klara*, *Marek*, natomiast c jest nazwą jednej z kart,
- $(a\ Believes\ th)$, gdzie *th* jest jednym z zaimków,
- *True*(*th*).

Zbiór wyrażeń

Zbiór wyrażeń języka $\mathcal{L}$ jest to najmniejszy zbiór, zawierający wyrażenia atomiczne i zamknięty ze względu na następujące reguły:

- Jeżeli φ i ψ są wyrażeniami, to wyrażeniami są również $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ oraz $\neg\varphi$.
- Jeżeli φ jest wyrażeniem, to wyrażeniami są również $(True\ \varphi)$ i $(a\ Believes\ \varphi)$, gdzie a to *Klara* albo *Marek*.
- Jeżeli φ jest wyrażeniem, to wyrażeniem jest również $\downarrow\varphi$.

Powyższa charakterystyka zbioru wyrażeń nie jest specjalnie skomplikowana. Poczynimy tylko krótką uwagę na temat wskaźnika zakresu $\downarrow$. Spójrzmy na następujące zdanie:

Marek ma trójkę trefl lub ten sąd jest prawdziwy.

Wyrażenie „ten sąd” jest niejednoznaczne: może się ono bowiem odnosić zarówno do całej alternatywy, jak i do samego jej drugiego składnika. By uniknąć tego typu dwuznaczności, Autorzy wprowadzają wskaźnik zakresu. Jego zadaniem jest dookreślenie sposobu użycia wyrażenia „ten sąd”. Przykładowo, jeżeli „ten sąd” ma się odnosić tylko do drugiego składnika powyższej alternatywy, wówczas należy umieścić przy nim wskaźnik:

$$(Marek\ Has\ 3\clubsuit) \vee \downarrow True(this)$$

Jeżeli natomiast „ten sąd” ma dotyczyć całego zdania, to wskaźnika przy wyrażeniu nie stosuje się:

$$(Marek\ Has\ 3\clubsuit) \vee True(this)$$

Zgodnie z powyższym ustaleniem, następujące zapisy są równoznaczne:

- $(Marek\ Has\ 3\clubsuit) \vee True(this)$
- $\downarrow((Marek\ Has\ 3\clubsuit) \vee True(this))$

3. Model sądu w sensie Russella

Następnym krokiem jest budowa modeli wyrażeń języka formalnego $\mathcal{L}$. Powstałe modele będą teoriomnogościowymi obiektami, zwanymi sądami w sensie Russella (*Russellian propositions*). Jak powiedzieliśmy, każdy sąd jest zbudowany z pewnych składników. Składniki naszych modeli to: *Marek*, *Klara*, 52 karty do gry oraz trzy atomy – H, Bel, Tr, reprezentujące kolejno relacje posiadania, przekonania i prawdziwości.
Najpierw zdefiniujemy klasę $PrePROP$ sądów, a następnie wyróżnimy z niej specjalną podklasę $PROP$.

Definicja 1 (**PrePROP**) $PrePROP$ *jest to największa klasa – taka, że jeżeli* $p \in PrePROP$, *to* p *jest jednym z następujących wyrażeń*:

1. $[a\ H\ c]$ lub $\overline{[a\ H\ c]}$, gdzie a to *Klara* albo *Marek*, natomiast c jest pewną kartą,
2. $[a\ Bel\ p]$ lub $\overline{[a\ Bel\ p]}$, gdzie a to *Klara* albo *Marek*, natomiast $p \in PrePROP$,
3. $[Tr\ p]$ lub $\overline{[Tr\ p]}$, gdzie $p \in PrePROP$,
4. $[\wedge X]$ lub $[\vee X]$, gdzie X jest podzbiorem klasy $PrePROP$.

W punktach 1-3 definicji 1 zdefiniowane są sądy atomiczne (wraz z ich negacjami), w punkcie 4, natomiast, zdefiniowano sądy złożone. Przykładowo:

- sąd p „Klara ma trójkę trefl" będzie miał teoriomnogościową postać: $p = [Klara\ H\ 3\clubsuit]$,
- sąd q „Klara nie ma trójki trefl" będzie miał postać: $q = \overline{[Klara\ H\ 3\clubsuit]}$,
- sąd r „Marek wie, że Klara ma trójkę trefl" będzie miał postać: $r = [Marek\ Bel\ p]$,
- sąd s „Sąd «Klara ma trójkę trefl» jest prawdziwy" będzie miał postać: $s = [Tr\ p]$.

Oprócz tego przyjmujemy, że zapis „$[Fa\ p]$" jest skrótem zapisu „$\overline{[Tr\ p]}$":

$$[Fa\ p] \stackrel{df}{=} \overline{[Tr\ p]}$$

Sąd kłamcy (czy też inaczej *Kłamca Russella*) ma więc w takim modelu postać:

$$f = [Fa\ f]$$

Kłamca Russella jest to sąd f, który głosi: „Sąd f jest fałszywy". Warto zauważyć, że:

$$f=[Fa[Fa\,f]]\text{ itd.}$$

Zdefiniowana powyżej klasa $PrePROP$ z pewnych względów nie spełnia oczekiwań Autorów. Otóż niektóre z elementów klasy $PrePROP$ są „kłopotliwe". Zanim to wyjaśnimy, odwołajmy się do prostego przykładu. Rozważmy następujące trzy sądy:

$$p=[Marek\ Bel\ p]\wedge[Fa\ p]$$

$$q=[Marek\ H\,3\clubsuit]\vee q$$

$$r=[\overline{Marek\ H\,3\clubsuit}]\wedge r$$

Sąd p głosi: „Marek wierzy w sąd p i sąd p jest fałszywy". Jest to, co prawda, sąd samozwrotny (gdyż stwierdza coś o samym sobie), ale można go z powodzeniem wypowiedzieć (ewentualnie zapisać). Tymczasem próba wypowiedzenia sądów q i r musi skończyć się niepowodzeniem, gdyż prowadzi ona do zapętlenia. Weźmy przykładowo sąd q: „Marek ma trójkę trefl lub (Marek ma trójkę trefl lub (Marek ma trójkę trefl lub (...)))":

$$q=[Marek\ H\,3\clubsuit]\vee[[Marek\ H\,3\clubsuit]\vee[[Marek\ H\,3\clubsuit]\vee[\ldots]]]$$

W pierwszym przypadku litera „p" pełni funkcję nazwy sądu (*suppositio materialis*), natomiast w dwóch pozostałych przypadkach litery „q" i „r" są zmiennymi reprezentującymi sądy q i r (*suppositio formalis*). Podstawienie sądów q i r odpowiednio w miejsce liter „q" i „r" prowadzi właśnie do zapętlenia. Podobne odróżnienie supozycji napotykamy w *schemacie T* Tarskiego (zob. paragraf 6 tej pracy). Sam Tarski stwierdza, że z punktu widzenia gramatyki wyrażenie „p jest prawdziwe" może stać się zdaniem sensownym tylko wtedy, gdy za zmienną p podstawimy nazwę lub wyrażenie występujące w funkcji nazwy. Innymi słowy, chcąc powiedzieć o danym zdaniu, że jest prawdziwe, jesteśmy zobligowani do użycia nazwy tego zdania, a nie samego zdania[9]. Podobnie, gdy chcemy powiedzieć cokolwiek innego o p, na przykład „Marek wierzy w sąd p". Z tego właśnie powodu „p" nie zapętla pierwszego wyrażenia, natomiast „q" i „r" zapętlają wyrażenia, w których występują[10].

[9] Zob. A. Tarski, *Semantyczna koncepcja prawdy i podstawy semantyki*, [w:] A. Tarski, *Pisma logiczno-filozoficzne*, t. 1, Warszawa 1995, s. 235.

[10] Warto w tym miejscu wskazać na istotną niezręczność językową, która może niekiedy wprowadzać w błąd. Angielskie słowo *believe* tłumaczy się jako „wierzyć", „być przekonanym" lub „wiedzieć". Gdy powiemy „Marek jest przekonany, że *p*", możemy mieć uzasadnioną wątpli-

Poza tym należy zauważyć, że najprostszymi stwierdzeniami o świecie są sądy atomiczne (zob. definicja 1, punkty 1-3). Niektóre sądy atomiczne są cyrkularne. Najprostsze stwierdzenie jest to takie stwierdzenie, które przedmiotowi przyznaje jakąś cechę lub które głosi, że przedmiot pozostaje w jakiejś relacji. Stwierdzenie posiadania własności, czy pozostawania w relacji, dokonuje się wyłącznie na poziomie sądów atomicznych. Otóż przykład (nieatomicznych) sądów q i r pokazuje, że definicja 1 pozwala na formułowanie sądów cyrkularnych, które można by „wypowiadać" w nieskończoność. To oznacza, że nie da się za ich pomocą wydać żadnego konkretnego stwierdzenia. Żeby pozbyć się tego typu sądów, Autorzy nakładają na klasę $PrePROP$ pewne ograniczenie. Wyróżniają oni z klasy $PrePROP$ klasę $PROP$, której elementy nazywać będziemy *sądami w sensie Russella* (*Russellian propositions*).

Definicja 2 (PROP)

1. Zbiór $X \subseteq PrePROP$ nazywamy *zbiorem nieprzedmiotowym*, jeżeli w X nie występują żadne sądy atomiczne oraz każdy element zbioru X posiada bezpośredni składnik, który również jest elementem zbioru X.
2. Sąd p nazywamy *sądem nieprzedmiotowym*, jeżeli jest on elementem pewnego nieprzedmiotowego zbioru sądów. W przeciwnym razie p nazywamy sądem *przedmiotowym*.
3. Klasa $PROP$ jest to największa subklasa zbioru $PrePROP$ taka, że jeżeli $p \in PROP$, to p jest sądem przedmiotowym i każdy bezpośredni składnik sądu p w $PrePROP$ należy również do $PROP$.

Możemy powiedzieć, że zachodzi pewna analogia między ograniczeniem, wprowadzonym przez definicję 2, a aksjomatem ufundowania, znanym z klasycznej teorii mnogości. Trzeba jednak koniecznie dodać, że z klasy $PROP$ wykluczono *pewne* sądy cyrkularne, ale nie wykluczono *wszystkich* takich sądów. Przykładowo sądy

$$q = [Marek\ H\ 3\clubsuit] \vee q$$

oraz

$$r = \overline{[Marek\ H\ 3\clubsuit]} \wedge r$$

nie spełniają warunków należenia do klasy $PROP$, jednakże sąd

$$p = [Marek\ Bel\ p] \wedge [Fa\ p]$$

może bez przeszkód do klasy $PROP$ należeć, choć jest to sąd cyrkularny.

wość co do supozycji, w której występuje *p*. Wystarczy jednak przeformułować nieco tę wypowiedź: „Marek żywi przekonanie *p*", by wszelkie wątpliwości zniknęły.

Trzeba teraz w jakiś sposób skojarzyć wyrażenia języka $\mathcal{L}$ z Russellowskim modelem sądu. To zadanie spełni funkcja Val, zdefiniowana poniżej. Innymi słowy Val jest funkcją, która przekształca zbiór wyrażeń języka $\mathcal{L}$ na zbiór naszych teoriomnogościowych obiektów.

Definicja 3 (**Funkcja Val**) *Funkcją* Val *nazywamy taką funkcję, która każdej formule* $\varphi(this, that_1, ..., that_n)$ *przyporządkowuje parametryczny sąd* $Val(\varphi)$, *zawierający parametry* $p, q_1, ..., q_n$, *w następujący sposób*:

1. $Val(a\ Has\ c) = [a\ H\ c]$
2. $Val(a\ Believes\ that_i) = [a\ Bel\ q_i]$
3. $Val(a\ Believes\ this) = [a\ Bel\ p]$
4. $Val(a\ Believes\ \varphi) = [a\ Bel\ Val(\varphi)]$
5. $Val(True\ that_i) = [Tr\ q_i]$
6. $Val(True\ this) = [Tr\ p]$
7. $Val(True\ \varphi) = [Tr\ Val(\varphi)]$
8. $Val(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = [\wedge\{Val(\varphi_1),\ Val(\varphi_2)\}]$
   $Val(\varphi_1 \vee \varphi_2) = [\vee\{Val(\varphi_1),\ Val(\varphi_2)\}]$
9. $Val(\neg\varphi) = Val(\varphi)$
10. $Val(\downarrow \varphi) =$ dokładnie jedno rozwiązanie $p \in ParPROP$ równania: $p = Val(\varphi)(p, q_1, ...)$

4. Teoria ZFA

Nie trzeba być bystrym obserwatorem, żeby zauważyć, że model *zdania kłamcy* jest obiektem cyrkularnym, to znaczy obiektem odnoszącym się do siebie samego:

$$f = [Fa\, f]$$

Wiemy, że na gruncie standardowej teorii mnogości (ZFC) nie jest możliwe definiowanie przedmiotów nieufundowanych (w szczególności cyrkularnych). Barwise i Etchemendy, chcąc rozwiązać antynomię kłamcy, musieli posłużyć się więc inną wersją teorii mnogości. Jak już powiedzieliśmy, wybrali oni teorię ZFA, która powstała na bazie systemu ZFC poprzez usunięcie aksjomatu ufundowania i dodanie aksjomatu antyufundowania AFA[11]. W tej teorii można definiować zbiory nieufundowane, czyli między innymi takie zbiory, które są swoimi własnymi elementami, na przykład:

$$a = \{a\}$$

[11] Zob. P. Aczel, *Non-well-founded Sets*, Stanford 1988.

W ZFA można również definiować układy zbiorów nieregularnych typu:

$$b = \{c, d\}$$

$$d = \{b\}$$

Aczel przedstawił aksjomat AFA w języku grafów[12]. Przyjął on bowiem, że każdy zbiór jest pewną strukturą, którą można zobrazować za pomocą grafu skierowanego. Mówiąc w największym skrócie, każdemu zbiorowi odpowiada w teorii grafów pewien węzeł grafu, natomiast relacji bycia elementem odpowiada określona krawędź skierowana. Przykładowo zbiorowi $p = \{q\}$ odpowiadałby graf taki, jak na rysunku 1.

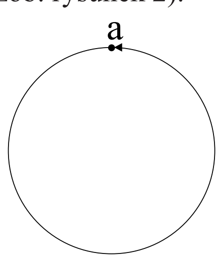
Rysunek 1

W tym wypadku węzeł p nazywamy rodzicem węzła q, a węzeł q nazywamy dzieckiem węzła p, co w skrócie zapisujemy „$p \mapsto q$".

Definicja 4 (**Funkcja dekorująca w sensie Aczela**) *Funkcją dekorującą w sensie Aczela nazywamy funkcję d_A, która każdemu węzłowi n grafu przyporządkowuje zbiór $d_A(n)$ w następujący sposób*:

$$d_A(n) = \{d_A(n') : \ n \mapsto n'\}$$

Warto zauważyć, że definicja 4 nie jest w pełni efektywna. Nie da się według tej definicji udekorować na przykład autosingletonu $a = \{a\}$, gdyż brakuje pierwszego kroku rekurencyjnego: zgodnie z definicją 4, aby udekorować pewien węzeł, trzeba najpierw „dysponować" dekoracją jego dzieci, co w przypadku autosingletonu jest niemożliwe (zob. rysunek 2).



Rysunek 2

[12] Tamże, s. 6.

Trzeba zatem definicję 4 Aczela uzupełnić. Wydaje się, że ta korekta jest konieczna dla formalnej poprawności teorii ZFA.

Definicja 5 (**Funkcja dekorująca**) *Funkcja dekorująca* d *jest to odwzorowanie przypisujące każdemu węzłowi* n *zbiór* $d(n)$ *w następujący sposób*:

$$d(n) = \begin{cases} \{d(n') & : n \mapsto n'\} \\ \Omega & \text{wtw.} n \mapsto n \wedge \neg\exists n' \neq n : n \mapsto n' \end{cases}$$

Funkcja d wyznacza tzw. *dekorację*. Dekoracją dowolnego węzła jest po prostu zbiór dekoracji wszystkich dzieci tego węzła, co głosi definicja 6.

Definicja 6 (**Dekoracja węzła**) *Dekoracją węzła* n *nazywamy zbiór wyznaczony przez funkcję dekorującą* $d(n)$.

Definicja 5 nie tylko poucza nas o sposobie dekorowania grafów w ZFA, ale jednocześnie charakteryzuje specyficzny dla teorii Aczela typ zbioru, zwany zbiorem Ω (autosingleton). Posługując się tą prostą teorią, Aczel formułuje swój aksjomat antyufundowania:

AFA Każdy graf posiada dokładnie jedną dekorację.

Dzięki aksjomatowi AFA staje się możliwe definiowanie zbiorów nieufundowanych: skoro istnieją grafy nieufundowane (jak choćby graf na rys. 2), a każdy graf jest obrazem pewnego zbioru, to istnieją również zbiory nieufundowane. Nie będziemy dalej zagłębiać się w bogactwie teorii ZFA. Przedstawiona garść informacji w zupełności wystarczy do realizacji celu tej pracy. Z naszego punktu widzenia istotne jest spostrzeżenie, że w przypadku zbiorów nieufundowanych zachodzi regres nieskończony relacji $\ni$. W przypadku zbioru $a = \{a\}$ będzie to regres:

$$a \ni a \ni a \ni \dots$$

Ta własność teorii ZFA sprawia, że w „teorii sądów" Barwise'a i Etchemendy'ego można sformułować nieufundowany sąd:

$$f = [Fa\, f]$$

Widać więc wyraźnie, że *Kłamca* (podobnie jak autosingleton) jest swoim własnym składnikiem:

$$f \ni f \ni f \ni \dots$$

5. Słaby model świata

Dysponujemy już językiem formalnym $\mathcal{L}$, w którym mówimy o świecie, oraz modelem sądu, czyli pewnym mnogościowym obiektem. Ponadto za pomocą funkcji Val skojarzyliśmy nasz model sądu z językiem. Przejdziemy teraz od języka do świata.

Przypomnijmy, że w ujęciu Russella sąd jest prawdziwy tylko wówczas, gdy istnieją fakty, które czynią go prawdziwym, natomiast jest fałszywy, kiedy nie istnieją takie fakty. Ponieważ fakty zawsze odnosimy do jakiegoś świata, zbudujemy pewien świat (model) $\mathfrak{M}$ oraz wyróżnimy jego dowolny podzbiór, będący zbiorem faktów. Od tej pory będziemy mówić o „stanach rzeczy w modelu" oraz o sytuacjach. Sytuacje są to zbiory stanów rzeczy.

Jednym z kluczowych pojęć teorii Barwise'a i Etchemendy'ego jest pojęcie *uprawdziwienia*. Mówiąc najogólniej, sytuacja s uprawdziwia sąd p wtedy i tylko wtedy, gdy stan rzeczy, odpowiadający sądowi p, należy do sytuacji *s*. Przykładowo, sytuacja s uprawdziwia sąd „Klara ma asa kier" wtedy i tylko wtedy, gdy *posiadanie przez Klarę asa kier* należy do sytuacji s.

Definicja 7 (**Zbiory SOA i SIT**) *Niech* SOA *będzie zbiorem stanów rzeczy, natomiast* SIT *zbiorem sytuacji.*

1. $\sigma \in SOA$ wtedy i tylko wtedy, gdy σ jest jednym z następujących wyrażeń:
   - $\langle H, a, c; i\rangle$
   - $\langle Tr, p; i\rangle$
   - $\langle Bel, a, p; i\rangle$,

   gdzie H, Tr oraz Bel są różnymi od siebie atomami, zmienna a to *Klara* lub *Marek*, c jest to je dna z kart, p jest elementem $PROP$, natomiast i wynosi albo 0, albo 1.
2. $s \in SIT$ wtedy i tylko wtedy, gdy s jest podzbiorem SOA.

Atomy H, Tr, Bel oznaczają odpowiednio relacje posiadania, prawdziwości oraz przekonania. Jeżeli w pewnym modelu zachodzi dany stan rzeczy, wówczas i przyjmuje wartość 1, jeśli nie zachodzi – i przyjmuje wartość 0. Na przykład, jeżeli w danym świecie Klara posiada asa kier, wówczas zapisujemy: $\langle H, Klara, A\heartsuit; 1\rangle$, natomiast jeśli Klara nie posiada tej karty, powinniśmy zapisać: $\langle H, Klara, A\heartsuit; 0\rangle$. Mówimy, że stany rzeczy $\langle H, a, c; 1\rangle$ oraz $\langle H, a, c; 0\rangle$ (i analogicznie stany rzeczy typu Tr oraz Bel) są wzajemnie swoimi *dualami*: jeżeli zachodzi jeden z nich, to nie może zachodzić drugi. Elementy zbioru SOA nazywamy w skrócie *soamami*, natomiast wyrażenia typu $\langle Tr, p; i\rangle$ nazywamy *faktami semantycznymi*.

Zdefiniujemy teraz relację uprawdziwiania, która skojarzy sądy o świecie ze stanami rzeczy.

Definicja 8 (**Relacja uprawdziwiania**) *Relacja uprawdziwiania* (*makes true relatioin*) *jest to dokładnie jedna relacja* $\vDash$, *zawarta w* $SIT \times PROP$, *spełniająca następujące warunki*:

- $s \vDash [a\ H\ c]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle H, a, c; 1\rangle \in s$.
- $s \vDash [\overline{a\ H\ c}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle H, a, c; 0\rangle \in s$.
- $s \vDash [a\ Bel\ p]$ wtedy i tylko wtedy, gdy .
- $s \vDash [\overline{a\ Bel\ p}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle Bel, a, p; 0\rangle \in s$.
- $s \vDash [Tr\ p]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle Tr, p; 1\rangle \in s$.
- $s \vDash [\overline{Tr\ p}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle Tr, p; 0\rangle \in s$.
- $s \vDash [\wedge \mathrm{X}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s \vDash p$ dla każdego $p \in X$.
- $s \vDash [\vee \mathrm{X}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s \vDash p$ dla pewnego $p \in X$.

Przypomnijmy, że dążymy do zdefiniowania słabego modelu świata. Takim modelem będziemy nazywali pewną kolekcję stanów rzeczy (włącznie ze stanami rzeczy zawierającymi stwierdzenie prawdziwości, np. $\langle Tr,\ p; 1\rangle$). Zanim zdefiniujemy słaby model, musimy zastanowić się, czego od niego oczekujemy. Otóż, Barwise i Etchemendy stwierdzają, że słaby model powinien spełniać trzy wymogi:

- żaden stan rzeczy i jego dual nie mogą jednocześnie należeć do tego samego modelu (to znaczy, że przykładowo nie może Klara mieć i jednocześnie nie mieć asa kier),
- jeżeli do danego modelu należy fakt prawdziwości jakiegoś sądu p, to w tym modelu musi też być sytuacja, która uprawdziwia sąd p,
- jeżeli do danego modelu należy fakt fałszywości pewnego sądu p, to trzeba zapewnić, by w tym modelu żadna sytuacja nie uprawdziwiała sądu p.

Te trzy wymogi nakłada na model definicja 9.

Definicja 9 (**Słaby model świata**)

1. Niech dana będzie kolekcja $\mathfrak{M}$ soamów. Sąd p jest *uprawdziwiony* przez $\mathfrak{M}$, czyli $\mathfrak{M} \vDash p$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór $s \subseteq \mathfrak{M}$ taki, że $s \vDash p$; sąd p jest *ufałszywiony* przez $\mathfrak{M}$, czyli $\mathfrak{M} \nvDash p$, kiedy nie istnieje taki zbiór s.
2. Sąd p jest *prawdziwy* w $\mathfrak{M}$, czyli $True_{\mathfrak{M}}(p)$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle Tr, p; 1\rangle \in \mathfrak{M}$, natomiast jest *fałszywy* w $\mathfrak{M}$, czyli $False_{\mathfrak{M}}(p)$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle Tr, p; 0\rangle \in \mathfrak{M}$.

3. Kolekcja $\mathfrak{M}$ soamów jest *koherentna*, jeżeli żaden soam i jego dual nie są jednocześnie w $\mathfrak{M}$.
4. *Słabym modelem* $\mathfrak{M}$ świata nazywamy koherentną kolekcję soamów, spełniającą następujące warunki:
   - Jeżeli $True_{\mathfrak{M}}(p)$, to $\mathfrak{M} \vDash p$.
   - Jeżeli $False_{\mathfrak{M}}(p)$, to $\mathfrak{M} \nvDash p$.

Warto w tym miejscu zwrócić uwagę, że między między relacją prawdziwości i uprawdziwienia zachodzi pewna „jakościowa" różnica. Otóż z punktów 1 i 2 definicji 9 możemy wyczytać, że $\mathfrak{M} \vDash p$, $True_{\mathfrak{M}}(p)$ oraz $Fale_{\mathfrak{M}}(p)$ są „pozytywnymi" stwierdzeniami o świecie – postulują należenie pewnych faktów do świata $\mathfrak{M}$:

- stwierdzenie „$\mathfrak{M} \vDash p$" domaga się, by fakty, potrzebne do uprawdziwienia sądu p, należały do $\mathfrak{M}$,
- stwierdzenia „$True_{\mathfrak{M}}(p)$" i „$False_{\mathfrak{M}}(p)$" domagają się, by pewne fakty semantyczne (czyli $\langle Tr, p; 1\rangle$ bądź $\langle Tr, p; 0\rangle$) należały do $\mathfrak{M}$.

Tymczasem ufałszywienie $\mathfrak{M} \nvDash p$ jest stwierdzeniem „negatywnym": jeżeli model $\mathfrak{M}$ ufałszywia sąd p, wówczas fakty, które mogłyby uprawdziwić ten sąd, nie mogą należeć do modelu $\mathfrak{M}$. Mamy tu do czynienia nie tyle z negacją, co z „odmową" (ang. *denial*) istnienia w modelu $\mathfrak{M}$ faktów uprawdziwiających p.

Zwróćmy teraz uwagę na dość zaskakującą cechę słabego modelu, związaną z *sądem kłamcy*. Mówi o tym twierdzenie 1.

Twierdzenie 1 *Sąd kłamcy* $f = [Fa\, f]$ *jest ufałszywiony przez dowolny słaby model* $\mathfrak{M}$, *ale nie jest fałszywy w dowolnym słabym modelu* $\mathfrak{M}$.

Innymi słowy, nie istnieje dowolny słaby model $\mathfrak{M}$, zawierający jednocześnie fakt uprawdziwiający sąd f oraz fakt semantyczny $\langle Tr, f; 0\rangle$. Czyli z jednej strony w żadnym słabym modelu nie ma faktów, które uprawdziwiałyby sąd f, a z drugiej strony fakt fałszywości sądu f nie należy do żadnego słabego modelu[13]. Podkreślmy, że nie zachodzi tu żadna sprzeczność, lecz jest to jedynie ciekawa własność słabego modelu.

[13] Zob. J. Barwise, J. Etchemendy, *The Liar. An Essay on Truth and Circularity*, New York-Oxford 1987, s. 79.

6. Model semantycznie domknięty

Konstrukcja modelu semantycznie domkniętego jest nawiązaniem do *schematu T*, znanego z pism Tarskiego[14]:

„p" jest prawdziwy wtedy i tylko wtedy, *gdy p*

Analogicznie, w modelu semantycznie domkniętym prawdziwość będzie wiązała się z uprawdziwieniem, natomiast fałszywość z ufałszywieniem.

Definicja 10 (**Model semantycznie domknięty**) *Niech* $\mathfrak{M}$ *będzie słabym modelem świata*.

1. Model $\mathfrak{M}$ jest *T-domknięty*, jeżeli spełnia warunek: $True_{\mathfrak{M}}(p)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models p$. Możemy inaczej powiedzieć, że $\mathfrak{M} \models [Tr\ p]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models p$.
2. Model $\mathfrak{M}$ jest *F-domknięty*, jeżeli spełnia warunek: $False_{\mathfrak{M}}(p)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \not\models p$. Możemy inaczej powiedzieć, że $\mathfrak{M} \models [Fa\ p]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \not\models p$.
3. Model $\mathfrak{M}$ jest *semantycznie domknięty*, jeżeli jest jednocześnie T- i F-domknięty.

Powiedzieliśmy, że *Kłamca* jest ufałszywiony przez dowolny słaby model $\mathfrak{M}$, ale nie jest fałszywy w żadnym modelu $\mathfrak{M}$. Zatem, zgodnie z punktem 1 definicji 10, *Kłamca* nie może być prawdziwy w słabym modelu $\mathfrak{M}$. Z drugiej strony, zgodnie z punktem 2 definicji 10, skoro *Kłamca* jest ufałszywiony przez dowolny słaby model $\mathfrak{M}$, to musi też być fałszywy w tym modelu, co jest niezgodne z twierdzeniem 1. Stąd można wyciągnąć wniosek:

Twierdzenie 2 *Żaden słaby model nie jest* F *-domknięty*. *Nie istnieją modele semantycznie domknięte*.

Zachodzi więc potrzeba osłabienia warunków domknięcia. Autorzy decydują się na zastąpienie F -domknięcia N -domknięciem i podają następującą definicję modelu częściowo semantycznie domkniętego.

Definicja 11 (**Model częściowo semantycznie domknięty**) *Niech* $\mathfrak{M}$ *będzie słabym modelem świata*.

1. Model $\mathfrak{M}$ jest *N-domknięty*, jeżeli spełnia warunek: $False_{\mathfrak{M}}(p)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models \overline{p}$. To znaczy: $\mathfrak{M} \models [Fa\ p]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{M} \models \overline{p}$.

[14] Zob. A. Tarski, *Semantyczna koncepcja prawdy i podstawy semantyki*, [w:] A. Tarski, *Pisma logiczno-filozoficzne*, t. 1, Warszawa 1995, s. 234-235.

2. Model $\mathfrak{M}$ jest *częściowo semantycznie domknięty*, jeżeli jest jednocześnie T- i N-domknięty.

Dzięki temu możemy zdefiniować *model świata* w ogólności:

Definicja 12 *Modelem świata nazywamy każdy taki słaby model* $\mathfrak{M}$, *który jest częściowo semantycznie domknięty. Maksymalnym modelem nazywamy każdy taki model* $\mathfrak{M}$, *który nie zawiera się właściwie w żadnym innym modelu* $\mathfrak{N}$.

7. Sądy paradoksalne

Teraz, na bazie stworzonej aparatury, możemy próbować odpowiedzieć na pytanie, co to znaczy, że jakiś sąd jest paradoksalny.

Definicja 13 (**Sądy paradoksalne**)
1. Sąd p nazywamy sądem *paradoksalnym* w modelu $\mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego modelu maksymalnego $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$ nie zachodzi ani $True_{\mathfrak{N}}(p)$, ani $False_{\mathfrak{N}}(p)$.
2. Sąd p nazywamy sądem *klasycznym* wtedy i tylko wtedy, gdy sąd p nie jest paradoksalny w żadnym modelu, tzn. dla każdego modelu maksymalnego $\mathfrak{M}$ zachodzi albo $True_{\mathfrak{M}}(p)$, albo $False_{\mathfrak{M}}(p)$.
3. Sądami *względnie paradoksalnymi* nazywamy sądy, które są paradoksalne w niektórych modelach, ale w innych modelach nie są paradoksalne.

Wróćmy zatem do tych kilku wersji antynomii kłamcy, które zaprezentowaliśmy w paragrafie 1, i spróbujmy odpowiedzieć – w myśl definicji 13 – z jakim rodzajem paradoksalności mamy do czynienia w poszczególnych przypadkach.

Sąd kłamcy $f = [Fa\ f]$ jest bezwzględnie paradoksalny, tzn. paradoksalny w każdym modelu.

Następujący sąd jest względnie paradoksalny:

$$p = [a\ H\ A\spadesuit] \vee [Fa\ p]$$

Jest on prawdziwy w maksymalnych modelach, w których a ma asa pik, a paradoksalny w pozostałych.

Cykl kłamcy jest bezwzględnie paradoksalny:

$$p_1 = [Tr\ p_2]$$

$$\ldots$$
$$p_n = [Tr\ q]$$
$$q = [Fa\ p_1]$$

Co więcej, każdy z elementów tego cyklu jest bezwzględnie paradoksalny. Następujący układ zdań jest bezwzględnie paradkosalny:

Pan A do Pana B:

„Mój sąd jest prawdziwy, ale Pana sąd jest fałszywy".

Pan B do Pana A:

„Mój sąd jest prawdziwy, ale Pana sąd jest fałszywy".

Te dwa sądy możemy zapisać formalnie:

$$p_0 = [Tr\ p_0] \wedge [Fa\ p_1]$$
$$p_1 = [Tr\ p_1] \wedge [Fa\ p_0]$$

Żeby stwierdzić paradoksalność powyższego układu, należy przypomnieć, że podstawą naszego modelu jest teoria mnogości z aksjomatem antyufundowania AFA. Aksjomat ten posiada dwie ważne z naszego punktu widzenia konsekwencje:

- dzięki AFA możemy stwierdzić „istnienie" sądów p_0 i p_1,
- AFA zmusza nas do uznania, że p_0 i p_1 to jeden i ten sam sąd, gdyż p_0 i p_1 posiadają dokładnie tę samą strukturę.

Zgodnie z powyższym, należy przyjąć, że sąd $p_0 = p_1$ głosi o sobie samym, że jest zarazem prawdziwy i fałszywy, co stanowi antynomię.

W przypadku *antynomii Löba* rozważane zdanie

Jeżeli to (*całe*) *zdanie jest prawdziwe*, *to Marek ma trójkę trefl*.

Jest względnie paradoksalne: jest ono prawdziwe w modelach, w których Marek ma trójkę trefl, a paradoksalne w pozostałych.

Zagadka Gupty nie jest już jednak przypadkiem tak oczywistym:

Pan A:

$$a_1 = [Marek\ H\ A\clubsuit]$$
$$a_2 = [Tr\ b_1] \wedge [Tr\ b_2]$$
$$a_3 = \overline{a}_2$$

Pan B:

$$b_1 = [Klara\ H\ A\clubsuit]$$

$$b_2 = [[Fa\ a_1] \wedge [Fa\ a_2]] \vee [[Fa\ a_1] \wedge [Fa\ a_3]]$$

Jak powiedzieliśmy, Gupta uznał ten przypadek za kontrprzykład jednej z wersji antynomii kłamcy, rozważanej przez Kripkego. Jest to więc układ względnie paradoksalny.

Zakończenie

Celem tej pracy była prezentacja jednego z zastosowań teorii zbiorów nieufundowanych ZFA. Zastosowanie to odnaleźli na gruncie filozofii Barwise i Etchemendy. Wspomniani Autorzy, posługując się teorią ZFA, zaproponowali nowe spojrzenie na antynomię kłamcy. Skonstruowali pewien model sądu (w sensie Russella) oraz podali warunki paradoksalności tego sądu w danym świecie $\mathfrak{M}$. Ponadto odróżnili sądy paradoksalne względnie od sądów paradoksalnych bezwzględnie.

W niniejszej pracy została omówiona tylko część badań Barwise'a i Etchemendy'ego – ta, która dotyczy Russellowskiej charakterystyki sądów. Pominęliśmy natomiast preferowane przez Autorów rozwiązanie, którego podstawą jest sąd w sensie Austina (zainteresowany czytelnik może sięgnąć do książki *The Liar*). Nie przedstawiliśmy tego zagadnienia, ponieważ naszym celem był nie tyle namysł nad antynomią kłamcy, co formalna analiza modelu, będącego przykładem zastosowania teorii zbiorów, które jeszcze niecałe sto lat temu uważano za zbiory „zbyteczne".

Streszczenie

Celem artykułu jest prezentacja jednego z filozoficznych zastosowań teorii hiperzbiorów ZFA. Autorami tego pomysłu są Barwise i Etchemendy, którzy proponują nowe rozwiązanie antynomii kłamcy. Artykuł przedstawia tzw. koncepcję sądu (i prawdziwości) w ujęciu Russella. Zgodnie z tą koncepcją *sąd Kłamcy* posiada teoriomnogościową reprezentację w postaci obiektu $f = [Fa\, f]$. Zapis ten należy odczytywać: „sąd f to sąd, który głosi, że f jest fałszywy".

Kluczem do omawianego rozwiązania jest zdefiniowanie dwóch typów paradoksalności: paradoksalności względnej i paradoksalności bezwzględnej. Sąd jest paradoksalny bezwzględnie, jeżeli jest paradoksalny w każdym świecie, natomiast jest paradoksalny względnie, jeżeli jest paradoksalny w pewnych światach, ale nie we wszystkich.

Słowa kluczowe: hiperzbiór, antynomia kłamcy, aksjomat antyufundowania, model, sąd, prawda.

Abstract

Liar Paradox and the Hyperset Theory

The objective of the paper is to discuss one of the philosophical applications of the hyperset theory ZFA. The idea is due to Barwise and Etchemendy, who proposed a new solution to the Liar paradox. The solution involves Russellian account of proposition (and truth). According to Russellian account, *Liar proposition* may be represented in set theory as: $f = [Fa\, f]$, to be read: „proposition f is a proposition stating that f is false".

The solution is based on the distinction between two kinds of paradoxicality: contingent paradoxicality and intrinsical paradoxicality. A proposition is intrinsically paradoxical, if it is paradoxical in every world, and is contingently paradoxical if it is paradoxical in some worlds but not in others.

Keywords: hyperset, Liar paradox, anti-foundation axiom, model, proposition, truth.

Bibliografia

Aczel, P., *Non-well-founded Sets*, Stanford 1988.

Barwise, J., Etchemendy, J. *The Liar*. *An Essay on Truth and Circularity*, New York-Oxford 1987.

Gupta, A., *Thuth and Paradox*, „Journal of Philosophical Logic" 11 (1982), s. 1-60.

Kripke, S., *Outline of a Theory of Truth*, „Journal of Philosophy" 72 (1975), s. 690-716.

Mirimanoff, D., *Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la thèorie des ensembles*, „L'enseignement mathèmatique" 19 (1917), s. 37-52.

Neumann von J., *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*, „Journal für reine und angewandte Mathematik" 154 (1925), s. 219-240.

Tarski A., *Semantyczna koncepcja prawdy i podstawy semantyki*, [w:] A. Tarski, *Pisma logiczno-filozoficzne*, t. 1, Warszawa 1995, s. 228-282.