JANUSZ MĄCZKA SDB (Kraków)

„PRINCIPIA MATHEMATICA" A FILOZOFIA A. N. WHITEHEADA

POCZĄTKI PRACY NAD *PRINCIPIAMI*

Principia mathematica swoim początkiem sięgają roku 1900. Po zakończeniu pracy nad *The principles of mathematics* Russell miał zamiar, we współpracy z Whiteheadem, napisać drugi tom tej książki. Jednak w miarę postępujących prac, rosnący zakres poruszanych tematów zmusił autorów do zrezygnowania z tego projektu. Rozpoczętą pracę Russell i Whitehead potraktowali jako materiał na zupełnie nową książkę[1]. Dzieło *Principia mathematica* w historii matematyki najczęściej łączy się z osobą B. Russella. Wynika to z paru powodów: Russell, wydając w 1903 r. *The Principles of Mathematics*, wyznaczył nowy kierunek badań nad logiką i matematyką. Również Russell poświęcił w tym czasie szczególnie dużo uwagi paradoksom logicznym i zaproponował ich rozwiązanie. Wspomina się również o Russellu jako o tym, którego prace logiczne, poprzedzające *Principia*, stworzyły odpowiedni klimat „filozoficzny" do powstania *Principiów*[2]. Wkład Whiteheada w pracę nad *Principiami* jest często przemilczany. Sam Russell w krótkim artykule starał się docenić udział Whiteheada w powstaniu *Principiów*[3], ale inni autorzy, cytując *Principia*, wspominają najczęściej tylko o Russellu[4]. Jak pokazuje H. Dufumier, prawdziwy początek *Principia* mają w *Traktacie o algebrze uniwersalnej*, gdyż tam właśnie pojawiła się idea syntezy matematyki, wyznaczająca ogólny kierunek podejścia do tego problemu[5].

---

1 Por. B. Russell, A.N. Whitehead, *Principia mathematica* (dalej PM), Cambridge 1910–1913, s. V.

2 Por. K. Gödel, *Russell's Mathematical Logic*, [w:] P.A. Schilpp (red.), *The Philosophy of Bertrand Russell*, New York 1944, s. 125–153; C. Magione, S. Bozzi, *Storia della logica*, Milano 1993, s. 390–391.

3 B. Russell, *Whitehead and Principia Mathematica*, „Mind a Quarterly Reviev of Psychology and Philosophy" 57:1948, s. 137–138.

4 Por. H. Scholz, *Zarys historii logiki*, Warszawa 1965, s. 77

5 Por. H. Dufumier, *La philosophie des mathématiques de MM. Russell et Whitehead*, „Revue de Métaphysique et de Morale" 20:1912, s. 539.

W matematycznych pracach Whiteheada z okresu 1901–1906 logika zaczyna nabierać coraz większego znaczenia. Jest to „rozwinięta" logika algebraiczna z obecnymi w niej elementami teorii relacji i teorii dedukcji, ale ciągle traktowana przez Whiteheada jako narzędzie badawcze. Natomiast prace Russella z tego samego okresu pokazują, że odpowiednio skonstruowana logika (rozumiana jako logika matematyczna) może spełnić o wiele ważniejsze zadanie, może bowiem posłużyć do uporządkowania podstaw matematyki. Bliższe zajęcie się przez Whiteheada logiką matematyczną i jego współpraca z Russellem oznaczało przejście od traktowania logiki jako narzędzia badawczego do możliwości zrealizowania przy pomocy logiki celu postawionego w *Traktacie*.

Przystępując do prac nad *Principiami*, Whitehead znał prace z zakresu logiki: Boole'a, Schrödera, Cantora, Veblena, Peano, logiczne prace Russella i idee logiki Fregego. Znał, jak na owe czasy, wiele nowoczesnych technik rachunku logicznego. Szczególnie ważne dla *Principiów* okazały się udoskonalona przez Whiteheada symbolika Peano i teoria liczb kardynalnych, a także inne zaawansowane działy matematyki. Whitehead znał wprawdzie założenia teorii mnogości zaproponowane przez Canotra, ale uważał, że nie mogą one być podstawą dla uporządkowania matematyki. Problem nie leżał w uniwersalnym języku, lecz w braku odpowiedzi na pytanie: o jakich przedmiotach matematycznych mówi teoria mnogości?[6] Dotychczasowe kierunki logiczne wymagały niewątpliwie pewnego jednorodnego opracowania. Już logika Fregego była pewną syntezą wcześniejszych systemów logicznych, ale najdalej rozwiniętą logiczną teorią tamtych czasów była propozycja Russella przedstawiona w *The Principles* z 1903 r.

Prawie we wszystkich matematyczno-logicznych pracach Whiteheada pisanych przed *Principiami* mało znajdujemy odwołań do prac Fregego, można natomiast spotkać tam wiele cytatów z prac Boole'a, Peano czy Russella. Wydaje się, że świadom licznych paradoksów, jakie pojawiały się w ówczesnej logice, Whitehead starał się operować tą jej częścią, która matematycznie wydawała się „bezpieczniejsza" Russell natomiast w swoich logicznych pracach przyjął inny kierunek. Starał się on raczej stawić czoła zaistniałym trudnościom. Rozwijał analizę logiczną Fregego, ulepszał rachunek algebraiczny, rozwijał logikę relacyjną. Ważną rzeczą, jaka pozostała do rozstrzygnięcia, był problem paradoksów. Rozwiązanie tego problemu stało się możliwe po opracowaniu przez Russella teorii deskrypcji w 1905 roku. Uporanie się z tym problemem nastąpiło „dopiero" w 1906 r., gdy Russell na bazie logicznych opracowań rozwinął zarysowaną wcześniej teorię

---

[6] Por. M. H a m p e, *Einleitung: Whitehaeds Entwicklung einer teorie der Ausdehnung*, [w:] M. H a m p e und H. M a a s s e n (Hrsg.), *Prozess, Gefühl und Raum-Zeit*, Frankfurt am Main 1991, s. 225.

typów[7]. Prace nad *Principiami* mogły więc nabrać właściwego rozpędu. Od tego momentu również Whitehead cały swój czas poświęcał na realizację nakreślonego programu.

Nasze rozważania będą szły w dwóch kierunkach. Przybliżając treść *Principiów*, spróbujemy przyjrzeć się związkom matematycznego programu Whiteheada, nakreślonego w *Traktacie o algebrze uniwersalnej* z programem matematycznym *Principia mathematica*. Drugi kierunek będzie stanowić rozważenie wpływu filozofii zawartej w *Principiach* na późniejszą filozofię Whiteheada. W pracach matematycznych Whiteheada kontekst filozoficzny nie jest jeszcze jasno sformułowany, widać jedynie pewne niesprecyzowane aspekty filozoficzne, które bardziej przeszkadzają analizom matematycznym, niż je objaśniają. Można jednak za V. Lowe powiedzieć, że „platoński (filozoficzny) punkt widzenia był zawsze jego drugą naturą, wzmacnianą na przestrzeni lat"[8]. Należy zatem zastanowić się, o ile filozofia *Principiów* pogłębia lub rozszerza wcześniejsze „filozoficzne ustalenia" i w jakim stopniu była ona inspirująca dla nowych filozoficznych koncepcji Whiteheada.

PODSTAWOWE IDEE LOGICZNE *PRINCIPIA MATHEMATICA*

Źródeł *Principia mathematica* należy szukać w analizie logiki Fregego i fundamentów arytmetyki, w aksjomatycznych systemach geometrii oraz w rozwiązaniu wykrytych paradoksów. Już same te źródła wskazują na cel, jaki trzeba będzie zrealizować – zbudować całą matematykę, zaczynając od podstawowych pojęć i zasad logicznych. Russell, definiując ten cel, stwierdzi, że *Principia mathematica* miały pokazać, jak „czysta matematyka wyrasta z czysto logicznych przesłanek i jak posługuje się wyłącznie pojęciami definiowanymi w terminach logicznych"[9] Zadanie to wymagało zatem: syntezy dotychczasowych osiągnięć w różnych kierunkach logiki, rozwiązania problemu paradoksów, rozwinięcia nowych technik dowodowych (by dedukcja

---

[7] Opracowaną teorię typów opublikował Russell w rozprawie *Mathematical Logic as based on the Theory of Types* w „American Journal of Mathematics" (30:1908), jednak na skutek krytyki Pioncarégo, zamieszczonej w artykule *La logique de l'infini* („Revue de métaphysique et de morale" lipiec 1909), Russell był zmuszony do wprowadzenia poprawek. Ostateczna wersja została opublikowana w artykule *La théorie de types logiques* w „Revue de métaphysique et de morale" (1910). Rozwinięta wersja teorii typów ukazała się w *Principiach*.

[8] V. Lowe, *Undestanding Whitehead*, Baltimor 1962, s. 140.

[9] B. Russell, *Mój rozwój filozoficzny*, tłumaczyła H. Krahelska, Warszawa 1971, s. 78–79. Por. R. Carnap., *The logicist Foundamentions of Mathematics*, [w:] *Philosophy of Mathematics*, P Banacerray and H. Putnam (ed.), Englewood, New Yersey 1964, s. 31–41.

twierdzeń była przejrzysta i efektywna), zdefiniowania pojęć matematycznych za pomocą pojęć logicznych, ukazania istotnego związku między czystą matematyką z zasadami logicznymi[10]. Whitehead, streszczając *Principia* w *The Organisation of Thought*[11], wyróżnia cztery etapy w rozwijaniu teorii logicznej. Pierwszym etapem jest studium arytmetyczne. Analizuje się w nim wzajemne związki pomiędzy konkretnymi twierdzeniami, podobnie jak w zwykłej arytmetyce analizie poddaje się związki między konkretnymi liczbami. Drugi etap jest algebraiczny: pojawia się w nim analiza przeprowadzona przy pomocy zmiennych, zamiast zdań rozważa się funkcje zdaniowe. W trzecim etapie, korzystając z analizy funkcjonalnej, przechodzi się od badań „intensji" do badań „ekstensji" Czwarty etap, analityczny, polega na badaniu własności szczególnych konstrukcji logicznych[12].

Russell i Whitehead rozpoczynają *Principia* od skonstruowania logiki matematycznej. Konstrukcja ta powinna spełnić trzy cele: po pierwsze, dać jak najdalej idącą analizę używanych pojęć pierwotnych i metod dowodzenia, zminimalizować liczbę niezdefiniowanych pojęć; po drugie, poprzez zastosowanie symboliki zapewnić maksymalną ścisłość, i po trzecie, doprowadzić do rozwiązania paradoksów logicznych[13].

Konstrukcja logiki matematycznej wymaga przyjęcia pojęć pierwotnych oraz aksjomatów. We wstępie autorzy zaznaczają, że przyjęte pojęcia i aksjomaty są – ich zdaniem – wystarczające, ale nie są konieczne[14]. Do przyjęcia tych pojęć i aksjomatów „zmusił" ich postawiony na samym początku cel dzieła. Pojęcia pierwotne są w *Principiach* jedynie objaśnione, ale nie są definiowane. Do pojęć fundamentalnych należą: zdanie (sąd) elementarne, elementarna funkcja zdaniowa (proporcjonalna), asercja zdaniowa, asercja funkcji zdaniowej, negacja, dysjunkcja (zdań i funkcji elementarnych), dwa kwantyfikatory, indywiduum i funkcja predykatywna (matryca).

Ten zestaw pojęć pierwotnych przyjętych na początku *Principiów*, pomimo całej swej prostoty, jest nieprecyzyjny. Brak w nim odróżnienia tak fundamentalnego w późniejszej logice, jakim jest odróżnienie systemu logiki od metasystemu, lub inaczej – języka systemu od metajęzyka, to znaczy języka, w którym mówi się o tym systemie. Brak jest również precyzyjnego odróżnienia definicji syntaktycznych i semantycznych. Te same braki spotkaliśmy już w poprzednich pracach

---

[10] Por. T. B a t ó g, *Principia mathematica*, [w:] *Przewodnik po literaturze filozoficznej XX wieku*, red. B. Skarga, t. 4, Warszawa 1996, s. 408.

[11] A.N. W h i t e h e a d, *The Organisation of Thoutht*, [w:] *The Aims of Education*, New York–London 1929, s. 113–117.

[12] Por. tamże, s. 117; A. P a r m e n t i e r, *La philosophie de Whitehead et le problème de Dieu*, Paris 1968, s. 27–29.

[13] Por. PM, s. XLVII.

[14] Por. PM, s. VI.

Whiteheada. Wydaje się, że na poziomie pojęć pierwotnych obaj autorzy więcej korzystali z własnej intuicji niż im się to wydawało.

Następnym krokiem było przyjęcie systemu aksjomatów. Poszczególne grupy aksjomatów zostały poprzedzone definicjami implikacji, koniunkcji, równoważności (przy pomocy negacji i dysjunkcji), oraz skomplikowaną definicją indukcyjną bycia tego samego typu. Choć implikacja jest traktowana jako dogodny skrót w ramach pojęć pierwotnych, to do tych pojęć nie jest zaliczona. W aksjomacie 9.12 autorzy określają konkretną implikację w ten sposób, że to, „co jest implikowane przez prawdziwą przesłankę, jest prawdziwe"[15]. Poszczególne grupy aksjomatów pozwalają, między innymi, na sformułowanie definicji indukcyjnej pojęcia zdania elementarnego, na określenie reguł generalizacji oraz rozwinięcie teorii dedukcji[16]. Teoria dedukcji odnosi się zasadniczo do zdań i funkcji elementarnych. Aby rozszerzyć ją na zdania nieelementarne, potrzeba odpowiedniego przedefiniowania spójników. Budowa teorii dedukcji powinna posłużyć z jednej strony do wykrycia fundamentalnych założeń tkwiących w matematyce, z drugiej zaś – do wyprowadzania nowych wniosków istotnych dla ogólnego schematu. W oparciu o teorię dedukcji definiowane są następnie wszystkie pojęcia teorii klas i teorii relacji.

Podane definicje, aksjomaty oraz teoria dedukcji pozwalają na rozwinięcie teorii zmiennej pozornej (w ten sposób Russell i Whitehead nazywają rachunek kwantyfikatorów). Ta część *Principiów* w dużej mierze została opracowana przez Whiteheada. Można powiedzieć, że jest to pierwszy pełny logiczny rachunek kwantyfikatorów.

Następnym etapem realizacji wcześniej nakreślonego celu jest przedstawienie teorii typów, która ma rozwiązać problem paradoksów[17] Operuje ona na funkcjach zdaniowych (nie zawiera aksjomatu ekstensjonalności). Whitehead i Russell uważają, że wszystkie znane antymonie mają swe źródło w zasadzie błędnego koła, sformułowanej przez Poincarégo[18]. Zasada ta stwierdza: „Jeśli definicja jakiegoś obiektu wymaga kwantyfikacji, to obiekt ten nie może być elementem zakresu, który przybiera kwantyfikowana zmienna"[19] By nie dopuścić do realizowania się tego błędu, autorzy wprowadzają tak zwaną rozgałęzioną teorię typów, która dzieli obiekty logiczne na typy, a następnie wewnątrz typów rozróżnia rzędy. Typ jest ogółem obiektów, dla których dana funkcja propozycjonalna przyjmuje określoną war-

---

[15] PM, t. 1, s. 98.

[16] System aksjomatów zawarty w *Principiach* został udoskonalony przez D. Hilberta i W. Ackermanna: *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin 1928.

[17] Por. PM, wstęp, s. 37–65.

[18] Por. PM, wstęp, s. 37

[19] S. K r a j e w s k i, *Teoria typów*, [w:] *Logika formalna*, red. W. Marciszewski, Warszawa 1987, s. 116; por. PM, s. 37; T. C z e ż o w s k i, *Teorya klas*, Lwów 1918, s. 18–19.

tość. Podział na rzędy dokonuje się wedle innej zasady. „Funkcjami n-tego rzędu są wszystkie takie funkcje, które można otrzymać z matryc n-tego rzędu poprzez związanie kwantyfikatorami niektórych argumentów tych matryc. Jeśli w matrycy n-tego rzędu zwiąże się kwantyfikatorami wszystkie zmienne, to otrzyma się sąd rzędu n-tego”[20]. Teoria typów tworzy swoistą hierarchię, od typu najniższego rzędu (indywidua), poprzez typy wyższych rzędów: indywidua, klasa indywiduów, klasa klas indywiduów i tak dalej[21].

Tak sformułowana teoria typów likwidowała wszystkie paradoksy; zarówno logiczne, jak i semantyczne. Ta niewątpliwa zaleta była okupiona dużym stopniem skomplikowania oraz eliminowała pewne możliwości rekonstrukcji elementarnych części klasycznej matematyki. Na przykład przyjmując teorię typów, nie można mówić o zbiorze liczb rzeczywistych, lecz tylko o liczbach rzeczywistych typu pierwszego, typu drugiego czy typu dowolnego[22], co kwestionuje teorię Dedekinda liczb rzeczywistych. Aby uniknąć tych problemów, Whitehead i Russell wprowadzają aksjomat, zwany aksjomatem sprowadzalności (redukowalności), który pozwala na redukowanie rzędu funkcji zdaniowej bez naruszania jej wartości (prawdziwości lub fałszywości). By nie być posądzonym o wprowadzenie tego aksjomatu *ad hoc*, uzasadniają oni jego wprowadzenie poprzez odwołanie się do aksjomatu istnienia klasy. Aksjomat ten odegrał ważną rolę przy definiowaniu identyczności, rozwinięciu teorii klas i teorii relacji.

Na przykład definicja klasy, która nie jest pojęciem pierwotnym, została zdefiniowana w *Principiach* przez zredukowanie jej do pojęcia funkcji zdaniowej. Można zatem stwierdzić za *Principiami*, że „symbole klas, podobnie jak symbole deskrypcji, są w naszym systemie symbolami niekompletnymi: ich użytek jest definiowany, lecz nie przyjmuje się, by one same cokolwiek oznaczały”[23] Klasy nie są więc realnymi obiektami, ale nie tylko symbolicznymi udogodnieniami, są bowiem charakteryzowane zbiorem przedmiotów spełniających pewną funkcję zdaniową. Koncepcja klasy została wyprowadzona z Russellowskiej koncepcji teorii deskrypcji. Russell, będąc niewątpliwie pod wpływem Fregego, wprowadził tę teorię do *Principiów*, by precyzować również takie pojęcia logiczne, jak identyczność, istnienie, itp.

Dalsze części *Principiów* poświęcone są systematycznemu i formalistycznemu wykładowi teorii mnogości. Russell i Whitehead dokonują tam wnikliwej analizy: ogólnej teorii klas, algebry zbiorów (pewna interpretacja algebry Boole'a), określają teorię relacji jako zbioru upo-

---

[20] T. B a t ó g, jw., s. 412.
[21] Por. PM, wstęp, s. 47–55.
[22] Por. L. C h w i s t e k, *Zasada sprzeczności w świetle nowszych badań B. Russella*, Kraków 1912, s. 56–57
[23] PM, t. 1, s. 21.

rządkowanych zbiorów, charakteryzują działania uogólniające na zbiorach i relacjach, własności relacji, typy relacji, teorie porządku liniowego, teorie liczb wymiernych i rzeczywistych oraz teorie wymiaru różnych wielkości, rozumianych, jako „zbiory" wektorowe.

Ważną częścią *Principiów* jest arytmetyka liczb naturalnych. Została ona opracowana na bazie liczb kardynalnych. Liczby naturalne i liczby kardynalne traktuje się jako klasy, złożone z klas indywiduów i należy je rozumieć jako klasy tych wszystkich klas, które są równej mocy z dowolną ustaloną klasą. Jeśli jeszcze u Canotra można było mówić o określonej liczbie np. 1, to w *Principiach* mówi się o różnych liczbach 1, zależnych od elementów klas jednostkowych tworzących tę liczbę[24]. W podobny sposób otrzymujemy inne liczby naturalne, które zastępuje się przez liczby kardynalne iduktywnie. Zakłada się również, że liczby iduktywne mają własności liczb naturalnych. Takie ujęcie teorii liczb naturalnych (przynajmniej w niektórych jej twierdzeniach) zmusza jednak do przyjęcia aksjomatu nieskończoności. Aksjomat ten mówi, że istnieje dostatecznie (nieskończenie) wiele indywiduów lub, co na jedno wychodzi, dostatecznie wiele liczb naturalnych. Ponieważ jest to aksjomat pozalogiczny, w twierdzeniach wymagających jego użycia dopisywany jest jako założenie. Podobnie został również potraktowany aksjomat wyboru, wykorzystywany w teorii mnogości i innych działach matematyki.

Principia mathematica są niewątpliwie w równym stopniu dziełem Russella i Whiteheada. Łatwiej jest mówić o *Principiach*, jako całości niż o poszczególnych częściach, którym przypisywałoby się swoiste autorstwo. Ale wcześniejsze prace obu autorów mogą sugerować, jakie części *Principiów* mogły powstać przy większym udziale któregoś z nich. Pewne jest jednak to, że każda powstająca część musiała uzyskać wspólną akceptację. Niewątpliwa wiedza matematyczna Whiteheada w bardzo istotny sposób przyczyniła się do powstania *Principiów*. Jemu przypisuje się uporządkowanie notacji symbolicznej, opracowanie arytmetyki liczb kardynalnych, zbieżności i granic funkcji. Również Whitehead był twórcą większej części wstępu[25] Russell wspominał, że Whitehead ustrzegł *Principia* przed powierzchownością prowadzonych analiz. Wprawdzie Whiteheadowskie rozwiązania pojawiających się problemów były często skomplikowane, wręcz „pedantycznie" precyzyjne, jednakże po wprowadzeniu koniecznych uproszczeń dzieło zyskiwało na spójności i kompleksowości. Ale jak pokazały późniejsze prace logiczne Chwistka, Hilberta, Ackermanna, Huntingtona, Carnapa, Mostowskiego, Quina, Tarskiego i innych, wiele zbytecznych komplikacji nie zostało do końca wyeliminowanych. Można się w tym dopatrzeć „pozostałości" wkładu Whiteheada.

---

[24] L. Chwistek, *Pisma filozoficzne i logiczne*, t. 2, Warszawa 1961, s. 274.

[25] Por. B. Russell, *Whitehead and Principia...*, s. 138.

W przyszłości Whitehead będzie niekiedy krytykował niektóre szczegóły matematyczne *Principiów*, jednak nie znajdziemy w jego następnych pracach krytyki odnoszącej się do celu tego dzieła czy metody jego realizacji.

WHITEHEAD A FILOZOFICZNY KONTEKST *PRINCIPIA MATHEMATICA*

Historia matematyki pokazuje, że *Principia mathematica* stały się wydarzeniem przynajmniej pod dwoma względami. Po pierwsze, zasady logiki formalnej, jakie zostały przedstawione w *Principiach*, choć często krytykowane, wykazały ogromną skuteczność w prowadzeniu analiz podstaw matematyki. Po drugie, filozofia przenikająca *Principia* wyznacza nowy sposób patrzenia na matematykę i jej związek z rzeczywistością.

Najbardziej ogólna charakterystyka filozofii *Principiów* pozwala na stwierdzenie, że unika ona dwóch skrajności. Z jednej strony Kantowskiego aprioryzmu, sankcjonującego podział na pojęcia logiczne i pojęcia naukowe, z drugiej strony pozytywistycznego redukcjonizmu, poszukującego uzasadnienia dla logiki w prostych empirycznych zależnościach między rzeczami. *Principia* pokazują, że można wejść w abstrakcyjny świat logiki bez z góry założonej metafizyki. Filozofia jest obecna w *Principiach*, ale nie jest ona przedzałożeniem, lecz swoistym „komentarzem" tkwiącym w całej strukturze dzieła. W *Principiach* tym, co „tworzy" filozofię, jest natura logiki, która pozwala na uchwycenie problemu prawdy w nowy sposób. Dotychczasowe traktowanie logiki, jedynie jako nauki ściśle odnoszącej się do reguł rozumowania (klasyczne rozumienie) czy też nauki charakteryzującej empiryczne zależności (pozytywizm), w dużym stopniu ograniczało logiczną możliwość wyrażenia prawdy. Trudny do zaakceptowania jest również kompromis między tymi skrajnymi stanowiskami. Nie jest bowiem prawdziwy jakiś idealizm monistyczny, rozpraszający problem prawdy w metafizyce, ani pewien typ psychologicznego pragmatyzmu, wyrażający stosunek umysłu do konkretnego przedmiotu[26] Jak twierdzi Russell, aby zrozumieć specyfikę logiki i to, co ona wyraża, trzeba szukać związku między umysłem a „wieloma rzeczami"[27] (lub elementami jednej rzeczy), uporządkowanymi w pewien sposób. Rozważmy na przykład zdanie mówiące, że dwa elementy pozostają ze sobą w pewnym związku (relacji). Zdanie to jest prawdziwe, jeśli te dwa elementy rzeczywiście pozostają ze sobą w tej relacji. Zdanie jest fałszywe, jeśli te elementy pozostają ze sobą w innej relacji niż ta, o której mówi zdanie. Dla filozofa istotne jest to, by badać niezależny

---

[26] Por. H. D u f u m i e r, jw., s. 562–566.
[27] Por. PM, s. 45–46.

od umysłu, obiektywny, formalny porządek zależności, a więc zależność, jako coś oddzielnego od realnych elementów (indywiduów). Znaczy to, że naturę logiki matematycznej z *Principiów* redukuje się do swoistego porządku zależności. Same elementy wydają się „wtórne", zależne od natury relacji. Logika implikuje więc pewną filozofię[28]

Echa filozofii matematyki z *Principiów* znajdziemy w późniejszych pracach Whitheheada. Szczególnie ciekawym pojęciem, jakie pojawia się w pracach Whiteheada, jest pojęcie obiektu ponadczasowego[29] (*eternal object*)[30]. Koncepcja obiektów ponadczasowych, jaka została przedstawiona na przykład w *Nauce i świecie nowożytnym*, w znacznej mierze nawiązuje do zasad logiki matematycznej. Występują w niej takie kategorie logiczne, jak zbiór, relacja, typ, hierarchia typów. Można je uznać za „pra-wzory" obiektów ponadczasowych. Obiekty ponadczasowe w swej istocie są relacyjne; jest to ważna, ale nie jedyna ich cecha. Innymi ich istotowymi cechami są: indywidualność istotowa oraz możliwość wkraczania w aktualne zaistnienia. Z jednej strony obiekt ponadczasowy jest stale zdolny do aktualizacji, z drugiej zaś strony jego relacyjna istota sprawia, że pozostaje on w związkach (w relacjach) z innymi obiektami ponadczasowymi i z możliwością aktualizacji[31] Pole relacji konstytuujące obiekt ponadczasowy możemy opisać jako zbiór. Co więcej, można dostrzec tu pewną analogię ze schematem teorii typów. Istnieje bowiem „rozkład dziedziny możliwości na proste przedmioty ponadczasowe i na różne stopnie złożonych przedmiotów ponadczasowych"[32]. Zaczynając więc od zbioru prostych obiektów ponadczasowych, poprzez powiększanie złożoności, otrzymujemy kolejne stopnie w ich hierarchii. Można się tutaj dopatrzeć pewnej analogii z hierarchią typów zawartą w *Principiach*.

Podobnych analogii możemy doszukać się w późniejszej filozofii Whiteheada. Jednym z podstawowych pojęć filozofii Whiteheada jest pojęcie zdarzenia. Według Whiteheada, zdarzenia mają pewną strukturę. Określa ona nie tylko „budowę" zdarzenia, ale również relacje występowania i następowania po sobie zdarzeń[33]

---

[28] Por. H. P u n t n a m, *Philosophy of Logic*, London 1972.

[29] Problem związku obiektów ponadczasowych z matematyką porusza np. A.P L o w r y w książce: *The Ontological Status of the Mathematical* (Emory University 1968), oraz w artykule: *Whitehead on the Nature of Mathematical Truth*, „Process Studies" 1:1971 s. 114–123.

[30] Przyjmuję tłumaczenie Whiteheadowskiego terminu „eternal objects" jako „obiekty ponadczasowe" Mam świadomość trudności, jakie wiążą się z interpretacją tego terminu; ich rozpatrzenie pozostawiam do innych prac.

[31] Por. A.N. W h i t e h e a d, *Nauka i świat nowożytny*, tł. M. Kozłowski, M. Pieńkowski, Kraków 197, s. 218.

[32] Tamże, s. 228.

[33] A.N. W h i t e h e a d, *An Enquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge*, Cambridge 1925, s. 195, 208.

Rozumienie przez Whitheada przyrody, jako ciągle dziejącego się procesu, skłania do nowego pojmowania czasu i przestrzeni. I tu Whitehead znowu odwołuje się do teorii relacji. „W starej teorii względności czas i przestrzeń są relacjami między materialnymi ciałami, w naszej teorii są one relacjami między zdarzeniami"[34]. W koncepcji Whiteheada „przestrzeń i czas zastępuje się badaniem współrelacji w zbiorze działań. Ten złożony stan jest jednością [...], jest to całe universum fizykalnego działania"[35] Podaliśmy tylko kilka miejsc, w których teoria relacji pojawia się w filozofii Whiteheada.

Ciekawym problemem filozoficznym, nad którym obecnie należy się zastanowić, jest odpowiedź na pytanie: Czy zasady logiczne zawarte w *Principiach* implikują jakiś typ istnienia? Problem ten odnosi się przede wszystkim do kwestii stosunku symbolu do rzeczywistości. Podstawową trudnością, związaną z tradycyjnie rozumianym istnieniem, jest brak (w tradycyjnych rozważaniach) logicznego rozróżnienia na zdanie i funkcję zdaniową (brak teorii deskrypcji). Zdanie wyraża to, co jest prawdą lub fałszem, natomiast funkcja zdaniowa jest schematem, z którego po nadaniu mu określonego znaczenia otrzymuje się zdanie. Można zatem powiedzieć, że funkcje zdaniowe mają formę istnienia *a priori*. „Istnieć" znaczy tyle co stwierdzić istnienie argumentów spełniających jakąś funkcję zdaniową. Jednak w świecie pozbawionym odniesienia do rzeczywistości (to znaczy w świecie czystej logiki) wszystkie zdania ogólne są prawdziwe (bo są zgodne z zasadami logiki). Z tak rozumianego istnienia nie wynika jednak logiczna konieczność istnienia świata rzeczywistego. Dbając bowiem jedynie o zachowanie reguł logicznych, mamy do czynienia ze „wszystkimi przypadkami", to znaczy z tym, że świat realny może być rozumiany jako zbiór „przypadków" dla koniecznych i oczywistych reguł logicznych. Nie możemy jednak logicznie stwierdzić, że żaden typ istnienia „świata" nie jest możliwy, gdyż nawet „zaprzeczenie zdania ogólnego jest zdaniem, które stwierdza istnienie i które wtedy zawsze byłoby fałszywe, gdyby nie istniał żaden wszechświat"[36] Istnienie świata jest przypadkowe, gdyż nie ma logicznej konieczności jego istnienia. W założeniu istnienia koniecznych, ogólnych i oczywistych zasad logicznych w przeciwieństwie do niekoniecznego świata rzeczywistego można dopatrzeć się pewnej formy idealizmu.

W *The Principles of Mathematics* Russell stwierdza, że wszystkie symbole mają znaczenie i odnoszą się do obiektywnie istniejących bytów, natomiast w *Principiach* spotykamy pewną modyfikację tego

[34] Tamże, s. 26.

[35] A.N. Whitehead, *Modes of Thought*, Cambridge 1959, s. 152. Por. A. Motycka, *Ideał racjonalności*, Wrocław–Warszawa–Kraków–Gdańsk–Łódź 1986, s. 255.

[36] B. Russell, *Wstęp do filozofii...*, s. 298–299.

stanowiska. Najlepiej uwidacznia się ona w przypadku pojęcia klasy. W *Principiach* klasa ma znaczenie symboliczne, niepełne, to znaczy klasy nie są prawdziwymi obiektami, ale jedynie pewnymi konwencjami symbolicznymi i lingwistycznymi[37].

Taka koncepcja symbolu i jego stosunku do rzeczywistości znalazła swoje odzwierciedlenie w późniejszych pracach Whiteheada. Whitehead traktuje symbole nie tylko jako dogodnie logiczne uproszczenia, ale według niego „symbole są niejako analizą pojęć i obrazem ich wzajemnych stosunków"[38] Symbole są więc przez Whiteheada traktowane jako znaki, które przybliżają, a nawet charakteryzują związki między poszczególnymi pojęciami. Mają one tę własność, że pozwalają nam „wykonywać różne ważne czynności bez myślenia o nich", lub inaczej „uwydatniają związki między danym pojęciem a szeregiem innych pojęć"[39] Whitehead, podsumowując, powie: „Tam, gdzie zaczyna się pojęcie 'zmiennych' i 'form algebraicznych', kończy się dziedzina arytmetyki"[40] Koncepcja symbolu znajdzie swoje szczególne rozwinięcie w osobnej pracy Whiteheada[41].

Należy z kolei zastanowić się nad podstawową kwestią *Principiów* – nad związkiem logiki i matematyki. Często stawia się pytanie: Gdzie w *Principiach* kończy się logika, a zaczyna matematyka? Tak Russell, jak i Whitehead, stwierdzają, że granica między logiką a matematyką uległa zatarciu. Są tego dwie przyczyny. Matematykę od najdawniejszych czasów traktowano jako naukę o „wielkościach" (o liczbach). Najnowsze badania nad matematyką pokazały, że pojęcie liczby można uogólnić w ramach teorii liczb kardynalnych i teorii relacji. Zabieg ten pozwala na badanie najbardziej elementarnych własności liczb jako relacji jedno-jednoznacznych i podobieństwa między klasami[42] Drugą ważną kwestią, z jaką musieli poradzić sobie matematycy, jest określenie wspólnej dziedziny dla matematyki i logiki. W *Principiach* jest ona taka sama dla obu nauk. Cechą charakterystyczną *Principiów* jest odejście od zajmowania się indywidualnymi rzeczami czy ich cechami, a zajęcie się formalnymi rozumowaniami. Cały czas chodzi o to, by szukać twierdzeń ogólnych bez mówienia w nich o konkretnych rzeczach czy cechach[43]

Dokonajmy teraz pewnego podsumowania. Droga, jaką obrali Whitehead i Russell, wiedzie ich do odkrycia najbardziej abstrakcyjnych warunków myślenia, aż do pewnej wersji idealizmu lub platonizmu.

---

[37] Por. PM, t. I, s. 71–72.

[38] A.N. W h i t e h e a d, *Wstęp do matematyki*, tłum. W. Wójtowicz, Warszawa–Lwów 1914, s. 47

[39] Tamże, s. 48–49.

[40] Tamże, s. 56.

[41] A.N. W h i t e h e a d, *Symbolism. Its Meaning and Effects*, Cambridge 1958.

[42] Por. B. R u s s e l l, *Wstęp do filozofii*..., s. 286.

[43] Tamże, s. 289.

Nie jest to idealizm jasno sformułowany; jest on raczej – jak powiedzieliśmy – „swoistym komentarzem", wynikającym z postawionego celu i ze sposobu jego realizacji. Można go zatem nazwać idealizmem poznawczym. Jak powie P. Bernays, „wartość koncepcji matematycznych inspirowanych przez platonizm polega na tym, że dostarczają one modeli dla pewnych pomysłów abstrakcyjnych. Modele te wyróżniają się swą prostotą i tym, że są logicznie zamknięte"[44].

Widzieliśmy wyżej, jakie konsekwencje filozoficzne miał ten idealizm dla Whiteheada. Należy jednak zauważyć, że swoje ostateczne opracowanie znajdzie on dopiero w *Process and Reality* (1929). Russell o wiele szybciej przedstawił swoje poglądy filozoficzne ukształtowane na podstawie *Principiów*. W 1911 r. napisał książkę *The Problems of Philosophy*[45], która była analizą filozoficznych zasad, jakimi Russell i Whitehead posługiwali się w *Principiach*. Russell uważał, że reguły logiczne istnieją, a liczby czy klasy są jedynie konstrukcjami logicznymi. Pozostając – jak twierdzi – pod wpływem Whiteheada, również materię uznawał za zbędną fikcję[46] Jest to więc wyraźny idealizm. „Idealiści przeczą więc istnieniu materii jako czegoś z istoty odmiennego od ducha, choć nie negują tego, że nasze dane zmysłowe są oznakami czegoś, co istnieje niezależnie od naszych prywatnych wrażeń"[47] Mamy bezpośrednią wiedzę o danych zmysłowych, natomiast przyjmując czasowe istnienie powszechników jako bytów niezależnych od naszego myślenia, możemy mieć o nich wiedzę dwojakiego rodzaju: bezpośrednią i pośrednią (pochodną). Bez jasnej zasady ustalającej, które powszechniki poznajemy bezpośrednio, a które pośrednio, możemy jedynie powiedzieć, że bezpośrednio poznajemy cechy zmysłowe, relacje przestrzenne i czasowe oraz pewne abstrakcyjne powszechniki logiczne. Rozważając naturę powszechników, Russell stwierdza: „Platońska 'teoria idei' stanowi próbę rozwiązania tego właśnie problemu, jak dotąd jedną z najbardziej, moim zdaniem, udanych"[48] Oprócz danych zmysłowych i powszechników, naszą wiedzę czerpiemy ze znajomości samooczywistych, ujmowanych intuicyjnie, i z prawd pochodnych, otrzymywanych z prawd samooczywistych przy zastosowaniu zasady dedukcji[49]

---

[44] P Bernays, *O platonizmie w matematyce*, [w:] *Filozofia matematyki*, red. R. Murawski, Poznań 1986, s. 310.

[45] B. Russell, *Problemy filozofii*, tłum. W. Sady, Warszawa 1995. Por. również: B. Tuchańska, *Koncepcja wiedzy apriorycznej i analitycznej a status logiki i matematyki*, Łódź 1995, szczególnie rozdz. 2 części III pod tytułem: *Russell: aprioryczność ufundowana na uniwersaliach*, s. 111–125.

[46] Por. B. Russell, *Problemy filozofii...*, s. 177

[47] Tamże, s. 41.

[48] Tamże, s. 102.

[49] Tamże, s. 121–122.

W 1913 r. wyszedł trzeci tom *Principiów*. Twórcą następnego tomu miał być Whitehead. Jak twierdzi Russell, tom ten miał dotyczyć problemu podstaw geometrii, wychodząc od zasad przyjętych w *Principiach*. Pomimo daleko zaawansowanych prac nad nim, tom ten jednak nigdy się nie ukazał. Zarówno Whitehead, jak i Russell, mieli „dość logiki" i obydwu zaczęła pociągać filozofia. Ponieważ różnice pomiędzy nimi w rozumieniu filozofii, które zaczęły się ujawniać już podczas pisania *Principiów*, stawały się coraz istotniejsze, ich drogi musiały się rozejść. Żaden z nich do logiki już nie powrócił, ale obaj często wspominali wspólną pracę, jako ważny etap w rozwoju ich poglądów.

PRINCIPIA MATHEMATICA AND WHITEHEAD'S PHILOSOPHY

Summary

The paper discusses Whitehead's contribution to the monumental work *Principia Mathematica* written together with Bertrand Russell. After presenting the beginnings of the project, its logical foundations are briefly analysed. Philosophical aspects of this work are discussed with the special emphasis on their influence on the future Whitehead's philosophy.