Ks. ADAM OLSZEWSKI (Kraków)

TEZA CHURCHA A DEFINICJA PRAWDY TARSKIEGO

Zadaniem niniejszego opracowania jest zasygnalizowanie treściowego związku, jaki istnieje pomiędzy tytułowymi zagadnieniami[1].

1. W literaturze z zakresu filozofii logiki pojawiają się sformułowania zwane, przez podobieństwo do tezy Churcha (TC), tezami[2]. Najogólniej rzecz biorąc, przez „tezę" rozumieć będziemy stwierdzenie, nie mające dowodu w sensie ścisłym, mogące zostać sfalsyfikowanym, w którym pojawiają się dwa pojęcia, z których jedno ma charakter intuicyjny, drugie zaś ścisły (matematyczny). Teza stanowi, że pomiędzy oboma pojęcia zachodzi odpowiedniość, która może mieć charakter intensjonalny lub ekstensjonalny. Oto przykład tezy:

(TI) *Klasa znaczeń okresu warunkowego języka potocznego pokrywa się zakresowo z klasą implikacyjnych logik porządku*[3].

Teza ta ustala zakresową odpowiedniość pomiędzy intuicyjnym pojęciem „znaczenie okresu warunkowego" a matematycznie zdefiniowanym pojęciem logiki implikacyjnej. Wydaje się, że formalizm

---

[1] Pojęcie 'treściowego związku' jest niestety niejasne. Mam tutaj na myśli coś zbliżonego do *relewancji,* o której wspominają Anderson, Belnap (*Entailment*, vol. 1, Princeton 1975, s. 17–18). Praca ta, w nieco zmienionej postaci, została wygłoszona jako referat w Karpaczu w roku 2000.

[2] Por. S. Shapiro, *Understanding Church's thesis*, „Journal of Philosophical Logic" 10:1980, s. 353–365; M. Davis, *Why Goedel didn't have Church's thesis*, „Information and Control" 54:1982, s. 3–22; E. Mendelson, *Second thoughts about Church's thesis and mathematical proofs*, „The Journal of Philosophy" 37:1990, s. 225–233.

[3] Weźmy klasę standardowych nadkonsekwencji bazowej konsekwencji spójnika porządku zapisanych za pomocą reguł inferencyjnych, w języku z jednym spójnikiem dwuargumentowym '$\rightarrow$'. Logiki implikacyjne to te, które zostają usprzecznione przez wzbogacenie o regułę: $\alpha\rightarrow\beta$ / $\beta\rightarrow\alpha$; por. J. K. Kabziński, *Investigations into the equivalence connective*, Kraków 1980, s. 18 [Rozprawy habilitacyjne UJ nr 48].

występujący w tezach da się przedstawić jako fragment teorii mnogości[4]. Ogólny schemat, tezy jako takiej, zapisać można w postaci:

(T)*INT = FORM.*

Nie jest jednak zbyt precyzyjne używanie równości typu (T). Czynimy tak, aby umożliwić sobie zapisanie $f \in INT$, co z kolei umożliwia falsyfikację równości typu (T).

2. W związku z TC pojawia się w literaturze przedmiotu stosunkowo dużo pomyłek. Dlatego przypomnę niektóre ważniejsze daty i sformułowania. Church, który wynalazł tzw. lambda-rachunek, już pod koniec 1933 roku przypuszczał, że każda funkcja efektywnie obliczalna jest definiowalna w lambda-rachunku[5]. Oficjalne ogłoszenie TC nastąpiło w abstrakcie skierowanym do American Mathematical Society, noszącym datę 22. 03. 1935. Publicznie TC została ogłoszona na posiedzeniu American Mathematical Society dnia 19. 04. 1935. Publikacją zawierającą TC jest: A. Church, *An unsolvable problem of elementary number theory*[6]. Oto co właściwie napisał Church:

> Celem niniejszej pracy jest zaproponowanie definicji efektywnej obliczalności, o której przyjmuje się, że w sposób satysfakcjonujący koresponduje z cokolwiek nieprecyzyjnym, intuicyjnym pojęciem[7].

Nieco zaś dalej w przypisie trzecim powiada:

> Jak się okaże, ta definicja efektywnej obliczalności może być podana w dwóch równoważnych formach: (1) że funkcja, określona w dziedzinie nieujemnych liczb całkowitych, nazwana będzie efektywnie obliczalną, gdy jest lambda-definiowalną, [...], (2) że funkcja, określona w dziedzinie nieujemnych liczb całkowitych, nazwana będzie efektywnie obliczalną, gdy jest rekurencyjna w sensie paragrafu czwartego poniżej. [...] Jednakże fakt, iż tak bardzo różnorodne i (w opinii autora) równie naturalne definicje efektywnej obliczalności okazały się być równoważnymi dodaje siły racjom podanym poniżej dla uznania tego, że konstytuują one tak ogólną charakterystykę tego pojęcia, która jest niesprzeczna ze zwykłym intuicyjnym jego rozumieniem[8].

---

[4] Jak łatwo zauważyć, ostatnie zdanie jest samo jakby tezą.

[5] Chodzi o funkcje określone w zbiorze liczb naturalnych; por. J. B. Rosser, *Highlights of the History of the Lambda-Calculus*, „Annals of the History of Computing" 6:1984, s. 344.

[6] Opublikowane w: „The American Journal of Mathematics" 58:1936, s. 345–363; przedruk w: M. Davis, *The Undecidable*, New York 1965, s. 89–107. Strony artykułu Churcha będą podawane za przedrukiem.

[7] M. Davis, jw., s. 90.

[8] Tamże.

Przyjmując, że litera R oznacza zbiór wszystkich funkcji ogólnie rekurencyjnych, E klasę wszystkich funkcji obliczalnych (w sensie intuicyjnym), f zaś dowolną funkcję określoną w zbiorze liczb naturalnych, można TC zapisać następująco:

(TC) Dla dowolnej funkcji f : $f \in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in R$.

Podczas gdy zbiór R jest dobrze określonym zbiorem (w sensie teorii mnogości ZF), to E nie jest takim dobrze określonym zbiorem, a nawet nie wiadomo, czy jest zbiorem w sensie ZF[9]. Choć w ogólnym przypadku nie jest obecnie znana metoda ewentualnego dowodu TC, to jednak sprawa jej ewentualnej falsyfikacji jest w miarę jasna. Należałoby znaleźć funkcję obliczalną w sensie intuicyjnym i nierekurencyjną, lub rekurencyjną i nieobliczalną w sensie intuicyjnym[10].

3. Obecnie przytoczymy to, co nazywać będziemy tezą Tarskiego (TT)[11].

UMOWA P. Poprawną formalnie definicję symbolu „Vr", sformułowaną w terminach metajęzyka, nazywać będziemy trafną definicją prawdy, o ile pociąga ona za sobą następujące konsekwencje:
(α) wszystkie zdania dające się uzyskać z wyrażenia „$x \in Vr$ wtedy i tylko wtedy, gdy p" przez zastąpienie symbolu „x" nazwą strukturalnoopisową dowolnego zdania rozważanego języka, zaś symbolu „p" – wyrażeniem, stanowiącym przekład tego zdania na metajęzyk.
(β) zdanie „dla dowolnego x – jeśli $x \in Vr$, to $x \in S$" (lub innymi słowy, „$Vr \subset S$")[12].

---

[9] Fakt ten jest okazją do pewnej „dowolności" w konstrukcji kontrprzykładów dla TC. Dla przykładu weźmy tzw. generator fizyczny liczb losowych w postaci monety i stowarzyszmy go z komputerem. Komputer będzie notował kolejne numery rzutów i ich wyniki (np. 'orzeł' to 1, zaś 'reszka' to 0). Zakładając, że wszystkie funkcje określone w liczbach naturalnych istnieją (platonizm odnośnie do istnienia obiektów matematycznych), i dysponując wspomnianym urządzeniem, dysponujemy 'algorytmem' obliczającym jakąś istniejącą funkcję. Nie wiem, w jaki sposób można orzec, czy *rzeczona* funkcja jest czy też nie jest rekurencyjna, choć wydaje się intuicyjnie obliczalną, gdyż dla dowolnej liczby naturalnej mogę w skończonej liczbie kroków odpowiedzieć na pytanie o wartość funkcji w tym punkcie; por. A. Olszewski, *Teza Churcha a Platonizm*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" 24:1999, s. 96–100. Co do generatorów liczb por.: R. Wieczorkowski, R. Zieliński, *Komputerowe generatory liczb losowych*, Warszawa 1997, s. 14.

[10] Drugi człon tej alternatywy uważany jest obecnie za trudny do spełnienia. Inkluzji $R \subseteq E$ raczej nie poddaje się w wątpliwość.

[11] Nazwą tą posługuję się w nawiązaniu do sformułowania E. Mendelsona z cytowanego w przypisie 2. artykułu. Mendelson rozumie TT nieco odmiennie.

[12] A. Tarski, *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, [w:] A. Tarski, *Pisma logiczno-filozoficzne*, red. J. Zygmunt, Warszawa 1995, s. 60–61.

Jak zaznacza sam Tarski, można by samą umowę *P* ściśle wypowiedzieć w meta-metanauce w postaci normalnej definicji. Warunki (α) oraz (β) wyznaczają warunki merytorycznej trafności semantycznej definicji prawdy z dokładnością do równoważności. Znaczy to, że dowolna semantyczna definicja prawdy (oznaczymy ją *DP*) „z konieczności byłaby równoważna"[13] definicji Tarskiego (DT). Dla lepszego uchwycenia sensu możemy to zapisać w postaci quasi-formuły:

$$\textit{Dla dowolnej } DP;\ DT \equiv DP$$

Wszystkie definicje prawdy (jak wspomniano z dokładnością do równoważności) wyznacza umowa *P*. Prawa strona tej umowy może zostać sformalizowana w odpowiednio bogatej teorii. To, czego nie da się ściśle wypowiedzieć, co jednak występuje w umowie *P*, to zwrot „trafna definicja prawdy". Cała umowa może chyba być rozumiana jako określenie tego właśnie zwrotu. Oczywiście DT spełnia wymagania wyrażone w umowie *P*. Dlatego mówić można o związku:

$$UMOWA\ P(Vr/DT);$$

w tym sensie, że DT jest szczegółowym przypadkiem ogólnej umowy.

W wyniku zaaplikowania *DT* do standardowego języka arytmetyki pierwszego rzędu i do standardowego modelu arytmetyki liczb naturalnych $N = \langle N, 0, ', +, \cdot \rangle$ uzyskuje się zbiór wszystkich zdań prawdziwych (zapisanych w języku pierwszego rzędu), którego zbiór numerów Goedla oznaczamy literą θ. Zbiór takich zdań prawdziwych nazwiemy arytmetyką. Tarski w pracy *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych* dowiódł twierdzenia o niedefiniowalności prawdy *NP*. Mówi ono, że:

(NP)Zbiór θ nie jest definiowalny w arytmetyce.

Ponieważ to twierdzenie zostało uzyskane przy przyjęciu DT, dla arytmetyki mamy:

$$DT_{AR} \Rightarrow NP.$$

Przyjmijmy dla potrzeb dalszych rozważań, że zachodzi:

$$(Z) \qquad \neg NP.$$

[13] Por. A. Tarski, *Semantyczna koncepcja prawdy i podstawy semantyki*, [w:] tamże, s. 252.

Zatem istnieje w arytmetyce formuła definiująca zbiór θ. Oznaczymy ją przez $P(x)$. Niech *num* oznacza funkcję numeracji goedlowskiej (wzajemnie jednoznacznej) formuł arytmetyki. Funkcja $neg{:}N \rightarrow N$, która zamienia 0 na 1, i odwrotnie, zaś na pozostałych liczbach jest identycznością, jest funkcją rekurencyjną, a nawet pierwotnie rekurencyjną. W dalszym ciągu rozważań postaramy się wykazać, że – na mocy *(Z)* – można wskazać argument, dla którego funkcja *neg* nie jest obliczalna.

Z formułą $P(x)$ związujemy funkcję $v_P{:}N \rightarrow N$, która jest identycznością na wszystkich liczbach prócz tych, które są numerami goedlowskimi zdań arytmetyki; i numerom zdań prawdziwych przyporządkowuje liczbę 1, zaś numerom zdań fałszywych 0. Mamy następujące własności:

(1) $v_P(n) = 1$ *wtw* $num(P(n)) \in \theta$,

(2) $v_P(n) = 0$ *wtw* $num(\neg P(n)) \in \theta$;

(3) *jeśli* $n \in \theta$, *to* $v_P(n) = v_P(num(P(n)))$;

(4) *jeśli A jest zdaniem arytmetyki, to:* $v_P(num(A)) = 1$ *wtw* $v_P(num(\neg A)) = 0$;

(5) na mocy lematu przekątniowego twierdzeniem arytmetyki jest: $B \leftrightarrow \neg P(num(B))$, *dla pewnego zdania B;*

(6) $v_P(num(B \leftrightarrow \neg P(num(B)))) = 1$, *z* (5);

(7) (6) *zachodzi wtw* $v_P(num(B)) = v_P(num(\neg P(num(B))))$;

(8) $v_P(num(\neg A)) = neg(v_P(num(A)))$, *z definicji odpowiednich funkcji;*

(9) $v_P(num(\neg P(num(B)))) = neg(v_P(num(P(num(B)))))$, *z* (8);

(10) $neg(v_P(num(P(num(B))))) = neg(v_P(num(B)))$, *z* (3);

(11) $v_P(num(B)) = neg(v_P(num(B)))$, *z* (7), (9) *i* (10);[14]

Własność z wiersza (11) uniemożliwia obliczenie, w sensie intuicyjnym, wartości funkcji *neg* w punkcie $v_P(num(B)) = 0$, wtedy $neg(0) = 1$ (z definicji), ale równocześnie $neg(0) = 0$ (z (11)). Zatem ta funkcja nie jest obliczalna w sensie intuicyjnym, choć matematycznie została zaliczona do funkcji pierwotnie rekurencyjnych. Prowadzi to do wniosku o fałszywości *TC* bo:

$$R \not\subset E.$$

[14] Jak się pewnie Czytelnik natychmiast zorientował, w rozumowaniu tym wykorzystany został dowód lematu przekątniowego.

Wykazaliśmy zatem:

$$\neg NP \Rightarrow \neg TC^{15}.$$

Przeprowadzone rozumowanie, o ile poprawne[16], jest szczególnym przypadkiem następującego spostrzeżenia:

$$(Arytmetyka\ sprzeczna) \Rightarrow \neg TC.$$

Jeśli arytmetyka jest sprzeczna, to da się w niej dowieść, że $0=1$. Wtedy nawet najprostsza funkcja rekurencyjna nie byłaby efektywnie obliczalna (w sensie intuicyjnym)[17], z powodów analogicznych dla których funkcja *neg* nie jest obliczalna. Inna możliwość jest taka, że nasze intuicyjne pojęcie algorytmu jest sprzeczne. Wydaje się zatem, że TC (o ile prawdziwa) służyć może do wyprowadzania formalnych wyników z dziedziny matematyki do dziedziny intuicji[18].

TARSKI'S DEFINITION OF TRUTH AND CHURCH'S THESIS

Summary

The aim of the article is to state some sort of the contentual connection between the issues announced in the title. I attempt to show that, if we don't accept some concequences of Tarski's Thesis – his Convention T – we have to accept the negation of Church's Thesis.

[15] Jeśli znakowi $\Rightarrow$ przysługuje własność mocnej kontrapozycji (charakterystycznej dla logiki klasycznej), to uzyskamy: $TC \Rightarrow NF$.

[16] Dla przeciętnego matematyka powyższe rozumowanie jest całkowicie trywialne. Fałszywa przesłanka implikuje dowolne zdanie.

[17] Jest to ważne, ponieważ powyższa argumentacja została przeprowadzona w sposób nieformalny.

[18] Podobne rozumowanie z użyciem *TC* przeprowadził Kleene w pracy: *Reflections on Church's Thesis*, „Notre Dame Journal of Formal Logic" 28:1987, s. 490–498.